Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 - Vorlesung, WS 2011/2012

3.Klausur, am 13.04.2012

Familienname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: ....Studienkennzahl: ....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.
   (a) A sei die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_7$. Bestimmen Sie das Tensorprodukt von A mit sich selbst.
   (b) Sind alle Äquivalenzklassen einer Menge mit einer Äquivalenzrelation gleichmächtig? (Beweis oder Gegenbeispiel)
   (c) Finden Sie ein unendliches Monoid, in dem nur ein Element invertierbar ist.
   (d) Was bewirkt eine Multiplikation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ von rechts?
   (e) Geben Sie die Lösungsmenge von $x + y = x + z = u + z = 1$ in $(\mathbb{Z}_2)^4$ durch Aufzählen der Elemente an.
   (f) Suchen Sie ein a, sodass $27x + ay = 36$ keine ganzzahligen Lösungen hat.
   (g) Formulieren Sie mit Quantoren: "Wenn man irgendeine rationale Zahl x nimmt, dann hat die einen reellen Partner y zwischen 0 und 1 und höchstens eine ganze Zahl z, die mit y zusammen x ergibt".
   (h) Ist in der Menge aller Unterräume eines VektorrxxoOoxxaums V die Relation $\leq_K$ antisymmetrisch?
   (i) Ein Flugzeug fliegt geradlinig von $(6, 17, 4)$ nach $(-1, -1, 1)$, ein anderes fliegt von $(-12, -11, 5)$ nach $(0, 0, 10)$. Wie nahe kommen sie sich?
   (j) Geben Sie die Wahrheitstafel von $(p \implies q) \wedge (p \vee q') \wedge (q \implies (p \vee q))$ an.

2. (15 Punkte) Ist $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ ein Ring? Gibt es ein Einselement? ($+$ bedeutet die punktweise Addition von Funktionen, $\circ$ die Komposition.)

3. (25 Punkte) Sei U ein Unterraum von V. Zeigen Sie: alle linearen Mannigfaltigkeiten zum Unterraum U sind gleichmächtig und $v + U = U$ gilt genau für $v \in U$. Geben Sie bei jedem Beweisschritt an, warum er gerechtfertigt ist.

4. (10 Punkte) Der Nutzen der Matrizenrechnung bei linearen Gleichungssystemen.