Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 - Vorlesung, WS 2011/2012

2.Klausur, am 02.03.2012 Gruppe A

Familienname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: ....Studienkennzahl: ....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.
   (a) Bestimmen Sie $f \circ g \circ h$ für $f(x) = \sin(x),\ g(x) = x - 3,\ h(x) = \ln(x)$.
   (b) Berechnen Sie die Kardinalzahl $(\aleph_0 \cdot c + 7)^3 \cdot c^2 \cdot 2^{\aleph_0} + 5$.
   (c) Ist $(\mathbb{R}, -)$ ein Monoid?
   (d) Ist $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ \exists z \in \mathbb{Z} : |z - (x + y)| < 0.5$ wahr oder falsch?
   (e) Geben Sie einen Vektor an, der auf die Gerade $12x - 5y = 31$ senkrecht steht und die Länge 52 hat.
   (f) Suchen Sie ein $a \in \mathbb{Z}_{1000}$ mit $73 \cdot a = 1$ in $\mathbb{Z}_{1000}$.
   (g) Bestimmen Sie den Nullraum der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_7$.
   (h) A sei die $2 \times 2-$Matrix über $\mathbb{Z}_5$ mit $a_{i,j} = i + j$. Invertieren Sie A.
   (i) Wieviele Elemente hat die Potenzmenge von $\mathbb{Z}_7 \cap \mathbb{Z}_{14}$?
   (j) Finden Sie das inverse Element zu $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10}$ (bzgl. Addition).
2. (23 Punkte) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Relation R gegeben durch $(a, b)R(c, d)$ falls $|a| - |b| = |c| - |d|$ gilt. Ist R eine Ordnungsrelation? Eine Äquivalenzrelation? Wie lautet die Äquivalenzklasse von $(1, 3)$ und allgemeiner von (a, b)? Welche Punkte der Ebene liegen in diesen Äquivalenzklassen? Welche Partition der Ebene ergibt sich durch die Äquivalenzklassen? Finden Sie ein Repräsentatensystem.
3. (15 Punkte) Finden Sie eine Basis des Vektorraums V aller 3×2-Matrizen über $\mathbb{Z}_{13}$ und zeigen Sie, dass es sich wirklich um eine Basis handelt. Begründen Sie dabei jeden Schritt. Was ist die Dimension von V?
4. (12 Punkte) Wozu ist das vektorielle Produkt gut? Geben Sie dazu auch eigene Beispiele an (die weder im Skriptum stehen, noch in den Übungen gerechnet wurden).