

**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 - Vorlesung, WS 2011/12**

**Klausur vom 1.6.2012**

Familiennamen: ..... Vorname: .....

Matrikelnummer: ..... Studienkennzahl: .....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.

- (a) Stellen Sie den GGT von 31 und 33 in der Form  $31x + 33y$  dar.
- (b)  $V$  sei der Vektorraum aller Polynome über  $\mathbb{Z}_5$  vom Grad  $\leq 10$ .  $\dim V = ?$
- (c) Wie lautet die Gleichung der Gerade durch  $(1, 2, 4)$ , die senkrecht auf  $3x - 7y + 5z = 1$  steht?
- (d)  $U$  und  $W$  seien zwei 4-dimensionale Unterräume eines 6-dimensionalen Vektorraums. Welche Dimension könnte der Durchschnitt von  $U$  und  $W$  haben?
- (e) Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Zerlegen Sie  $A^{-1}$  in ein Produkt von Elementarmatrizen.
- (f) Ist  $(-10, -9, -8, \dots, 9, 10, |)$  eine geordnete Menge? Ist sie linear geordnet?
- (g) Ist der Gruppenkern von  $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot)$  eine Untergruppe vom Gruppenkern von  $(\mathbb{Z}_{30}, \cdot)$  ?
- (h) Formulieren Sie mit Quantoren: " $f(x) = 0$  hat mindestens zwei Lösungen".
- (i) Finden Sie alle Lösungen von  $x + y + z + u = 1, x + y + 2z + 2u = 1, 2x + y + z + 2u = 2$  über  $\mathbb{Z}_3$ .
- (j) Sind  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  im Raum aller  $2 \times 2$ -Matrizen über  $\mathbb{Z}_7$  l.a.?

2. (20 Punkte) In der Ebene sei  $R$  durch  $(a, b)R(c, d)$  falls  $a^2 - b^2 = c^2 - d^2$  definiert. Ist  $R$  eine Ordnungsrelation? Eine Äquivalenzrelation? Wie sieht die Klasse von  $(3, 5)$  aus? Welche Punkte der Ebene liegen darin? Finden Sie die Faktormenge und ein Repräsentatensystem.

3. (20 Punkte) Zeigen Sie ausführlich, dass für einen Unterraum  $U$  von  $V$  auch  $V/U$  ein Vektorraum ist. Ist das ein Unterraum von  $V$  ? Begründen Sie jeden Schritt.

4. (10 Punkte) Die Stufen der Unendlichkeit: welche Arten der Unendlichkeit gibt es? Welche kann man wie erreichen?