Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 - Vorlesung, WS 2011/2012

Klausur am 5.7.2012

Familienname: HUMPEL .... Vorname: Stielzchen ....

Matrikelnummer: 45 00 000 .... Studienkennzahl: 9999 ....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.

   (a) Ist $(x+3)^2 \geq 0$ eine Aussage? Ein Pradikat? Ein Gesetz? (Das Universum ist $\mathbb{Z}$) nein ja ja

   (b) Finden Sie (durch Aufzahlen der Elemente) alle Losungen von $x+2y+3z=4, x+y+3z=0$ uber $\mathbb{Z}_5$. $(1,4,0), (3,4,1), (0,4,2), (2,4,3), (4,4,4)$

   (c) E sei die Ebene durch $(1,2,3)$, senkrecht zu $(1,2,-3)$. Geben Sie E in Hesse'scher Normalform an. $\frac{1}{\sqrt{14}}(x+2y-3z+4)=0$

   (d) Finden Sie alle Kardinalzahlen α, sodass $a.\alpha = a$ gilt. Alle endl. Kz. und $\aleph_0$

   (e) Formulieren Sie mit Quantoren: Die Menge A enthalt mindestens ein Element, das in der linearen Hulle der restlichen Elemente enthalten ist. zB $\exists x \in A : x \notin L(A \setminus \{x\})$

   (f) V sei der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2. Sind $b_1 : x \to 2, b_2 : x \to 2x+1, b_3 : x \to 3x^2+x+1$ eine Basis?

   f)
   $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$
   $\Rightarrow \forall x: \lambda_1 b_1(x) + \ldots = 0$
   $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
   $\dim V = 3 \Rightarrow$
   (b_1, b_2, b_3) ist Basis

   (g) Sei V wie vorhin. Stellen Sie (wenn moglich) $x \to x^2+x+1$ als Linearkombination von (b_1, b_2, b_3) dar. $\frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3$

   (h) V sei wieder wie vorhin. Ist die Menge aller $x \to a+bx^2$ mit $a,b \in \mathbb{Q}$ ein Unterraum von V? $f: x \to a+bx^2,\ g: x \to c+dx^2 \Rightarrow f+g$ und $\lambda f \in U$

   (i) Welche Matrix bewirkt bei Multiplikation von links die Addition des Zweifachen der 3. zur 4. Zeile einer 5×5-Matrix? $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

   (j) Kann ein echter Unterraum eines Vektorraums V dieselbe Dimension wie V haben? Ja! zB $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $U = \{(0, a_2, a_3, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

2. E sei die Ebene $3x+4y+5z=6$. Wie weit ist der Nullpunkt von E entfernt? Welcher Punkt P auf E ist dem Nullpunkt am nachsten? $\frac{n}{\|n\|} = \frac{1}{\sqrt{50}}(3,4,5) \to P = \frac{6}{\sqrt{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}}(3,4,5) = \frac{3}{25}(3,4,5)$

   2)
   HNF:
   $\frac{1}{\sqrt{50}}(3x+4y+5z-6)$
   $(0,0,0)$ einsetzen:
   $d = \frac{6}{\sqrt{50}}$

3. Zeigen Sie ausfuhrlich, dass jede naturliche Zahl ausser 1 eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellbar ist. Begrunden Sie dabei jeden Schritt. Max. 15 Punkte.

   8.14 (aber ausführlich!)

4. Was sind prime Restklassengruppen? Wieviele Elemente haben Sie? Geben Sie die prime Restklassengruppe modulo 20 explizit an. Max. 15 Punkte.

   $G_n = \{[x] \in \mathbb{Z}_n \mid ggT(x,n) = 1\}$ = Gruppenkern von $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$

   $|G_n| = \varphi(n)$ $\quad G_{20} = \{[1], [3], [7], [9], [11], [13], [17], [19]\}$