Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 - Vorlesung, SS 2012

Klausur am 25.9.2012

Familienname: RUMPEL .... Vorname: Stilzchen ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

1. Bitte beantworten die folgenden Fragen. Jede richtige Antwort bringt 5 Punkte. Legen Sie bitte Begründungen und Rechengang bei.

   (a) Die Abbildung, die $x \in \{0, 1, ..., 9\}$ in $2x-3$ (modulo 9) überführt, ist bijektiv und kann daher als Permutation aufgefasst werden. Zerlegen Sie diese Permutation in Transpositionen; ist sie gerade? *)

   (b) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ über jedem Körper diagonalisierbar? Nein; Garantie nur für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$

   (c) Bestimmen Sie das Image der Abbildung $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \to (x+y+z, x+z-y)$. $\mathbb{R}^2$, denn $\operatorname{Ker} h = \{0\}$, also $\dim \operatorname{Im} h = 2$.

   (d) Erstellen Sie die Matrixdarstellung vom obigen h bzgl. irgendwelcher Basen. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (e) Wieviele frei wählbare Parameter kann ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit A vom Format 12×15 und Rang $=7$ haben? 8

   (f) Finden Sie a, b, c, sodass $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ eine stochastische Matrix ist und berechnen Sie einen Gleichgewichtszustand.
   $a = 0.2$ $b = 0$ $c = 0.4$
   $P \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ergibt $\vec{x} = \frac{1}{9}(3,5,1)$

   (g) Fassen Sie A aus der vorigen Frage als Spiel auf. Gibt es einen Sattelpunkt? Ist das Spiel fair? $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$ Sattelp. bei (1,2) (unterstrichen) Wert $= 0.5$, also unfair

   (h) Eine Fläche zweiter Ordnung habe für den quadratischen Teil eine Matrix mit den Eigenwerten $3, 3, -3$ und keinen Mittelpunkt. Um welche Fläche handelt es sich? Ellipt. Paraboloid

   (i) Die alternierende Multilinearform σ habe auf allen Kombinationen von verschiedenen Basisvektoren b_1, b_2, b_3 den Wert 3. Berechnen Sie $\sigma(b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 - 2b_1)$. $= \sigma(b_1, b_2, b_3) + 2\sigma(b_1, b_2, b_1) + \ldots + \sigma(b_2, b_3, b_3) - 2\sigma(b_2, b_3, b_1) = -3$

   (j) Geben Sie ein lineares Optimierungsproblem an, dessen zulässiger Bereich ein Rechteck ist. zB $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ etc

   (k) Im erweiterten Hamming-Code der Länge 8 trifft das Wort 11111011 ein. Decodieren Sie es.

$Hy^t = 6$ (in Binärform) Abgesandt: 11111111

$c_A = (x-3)(x+2)(x-1)$ Ew: $3, -2, 1$ Ev: $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ sind og.

Orthonormiert: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, $(0,0,1)$

3 freie Rot-Achsen existieren (je nach u_1, u_2, u_3).

2. A sei die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte und orthonormale Eigenvektoren von A. Gibt es freie Rotationsachsen? Max. 20 Punkte.

3. Zeigen Sie ausführlich, dass jede lineare Mannigfaltigkeit als Lösung eines linearen Gleichungssystems beschrieben werden kann. Begrüenden Sie dabei jeden Schritt. Max. 15 Punkte. $= 29.11$ b)

4. Wie kann man hohe Potenzen einer Matrix berechnen? Was weiss man insbes., wenn die Matrix eine Diagonalmatrix bzw. eine Dreiecksmatrix ist? Hilft die Jordansche Normalform? Max. 15 Punkte.

Falls $A = C \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, C^{-1}$

dann $A^k = C \cdot \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\, C^{-1}$

Ähnlich bei Jord. NF, wobei $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}^n = \dots$

Zu Dreiecksmatrix: Satz 60.2

Zusammen mit QR-Zerlegung 56.4

Weiters: $A^k = \lambda_0 E + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1}$

und Cayley-Hamilton

---

*) Sorry, es sollte heißen $\{0, 1, \dots, 8\}$ (mod 9)

Ich habe Ihre Antworten alle als richtig gewertet.

Es gibt eben 3 Arten von Mathematikern: solche, die zählen können und solche, die's nicht können...