Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
3. Übungsblatt für den 26. März 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Die Unterräume $U, V \leq \mathbb{R}^5$ seien gegeben durch
$$U = L\big((1,1,0,1,2),(1,2,1,1,1),(-1,2,3,0,-4)\big)$$
und
$$V = L\big((1,-1,-2,-1,2),(0,0,0,1,1),(-1,0,1,0,-2),(1,-2,-3,-1,3)\big).$$
   (a) Gilt $U = V$?
   (b) Gilt $(1,2,3,0,0) + U = (1,1,2,-1,0) + V$?

2. Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$ und $\operatorname{Rg} \underline{A}$ für das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & -1 & 1+a \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.

3. Sei $A \in K_m^n$ mit $\operatorname{Rg} A = m$. Zeigen Sie, dass $B \in K_n^m$ existiert mit $AB = E_m$.

4. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit
$$(x,y) + (x',y') := (xx', y+y')$$
$$\lambda(x,y) := (x^\lambda, \lambda y).$$
(Sie müssen nicht zeigen, dass es sich um einen Vektorraum handelt.)
   (a) Ist $h_1 \colon V \to V$ mit $(x,y) \mapsto (x^2, 2y)$ linear?
   (b) Ist $h_2 \colon V \to V$ mit $(x,y) \mapsto (x^2, 2y + x)$ linear?

5. Seien $f \colon {}_K V \to {}_K W$ und $g \colon {}_K U \to {}_K V$ linear. Zeigen Sie:
$$\dim \operatorname{Im}(f \circ g) \leq \min(\dim \operatorname{Im} f, \dim \operatorname{Im} g).$$

6. Seien $U_1, U_2 \leq_K V$ und sei
$$\varphi : U_1 \times U_2 \to V, \quad (a,b) \mapsto a - b.$$
   (a) Zeigen Sie, dass φ linear ist, wenn man $U_1 \times U_2$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation als K-Vektorraum auffasst.
   (b) Wenden Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 27.6) auf φ an und folgern Sie daraus die Dimensionsformel für Unterräume (Satz 21.9).

7. Sei p eine Primzahl. Berechnen Sie $|\operatorname{Gl}(n, \mathbb{Z}_p)|$.

8. Seien $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4, \mathbb{R}_3)$, B und C die kanonischen Basen in $\mathbb{R}_4$ und $\mathbb{R}_3$ und

$$A_{h;B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^4.$$

Bestimmen Sie $A_{h;B',C'}$, wobei

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$