# Übungen zu
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
# 6. Übungsblatt für den 7. Mai 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Überprüfen Sie anhand der folgenden Beispiele die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (49.6) und die Dreiecksungleichung (50.3), und bestimmen Sie jeweils den Winkel (50.10) zwischen den beiden angegebenen Vektoren.

   (a) $(5, 3)$ und $(10, -6)$;

   (b) $(5, 3)$ und $(10, 5)$;

   (c) $(5, 3)$ und $(10, 6)$;

   (d) $(5, 3)$ und $(-10, -6)$;

   (e) $(5, 3, 0)$ und $(10, 6, 1)$;

   (f) Den Funktionen $f, g \in C[0, 1]$, mit $f(x) = x$ und $g(x) = e^x$ .

   Versuchen Sie, in jedem Fall das Ergebnis zu interpretieren.

2. Es wurden die folgenden Meßdaten erhoben:

$$\mathbf{x} = (-2.8,\ -1.8,\ -0.8,\ 1.2,\ 4.2),$$
$$\mathbf{y} = (-0.18,\ -0.18,\ -0.10,\ 0.14,\ 0.32).$$

   Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten (Definition notfalls im Internet nachschlagen) dieser beiden Meßreihen sowie den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren. Wie hängen diese zusammen?

   Warum sagt man, es bestehe ein linearer Zusammenhang zwischen den Meßreihen, wenn der Korrelationskoeffizient in der Nähe von $+1$ oder $-1$ ist?

3. Sei $U$ ein Unterraum eines Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt, $\mathbf{v} \in V$, und $\mathbf{b} \in U$, sodass $\mathbf{v} - \mathbf{b}$ normal auf alle $\mathbf{u} \in U$ steht. Zeigen Sie, dass es dann genau einen Vektor in $U$ gibt, der unter allen Vektoren in $U$ den minimalen Abstand zu $\mathbf{v}$ hat.

4. Gegeben sei die Basis $\big((3, 4, 0),\ (2, 2, 0),\ (2, 7, 2)\big)$ des $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie darauf das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an, sowohl rechnerisch als auch graphisch.

   Sei weiters $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der berechneten Basis und verifizieren Sie das Ergebnis.

5. Sei $U = L(\,(3,0,1),\,(1,4,7)\,) \subseteq \mathbb{R}$. Seien weiters $\mathbf{x}_1 = (-1,8,3)$, $\mathbf{x}_2 = (-1,8,13)$. Bestimmen Sie zu jedem dieser Vektoren einen Vektor in $U$, der diesem am nächsten liegt. Ist dieser eindeutig bestimmt?

6. Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$, falls $x < \pi$, und $f(x) = -1$, falls $x > \pi$. Sei weiters $U = L(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$. Berechnen Sie ein $\hat{f} \in U$, welches unter allen Elementen von $U$ den minimalen Abstand zu $f$ hat (mit der Norm gemäß Bsp. 50.2.d). Warum ist $\hat{f}$ dadurch eindeutig bestimmt?

7. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und -vektoren von $\mathbf{A}$, mit
   (a) $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$;
   (b) $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$;
   (c) $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$;
   (d) $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;
   (e) $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

8. Die Ebene $E$ sei gegeben durch die Punkte $(3,4,5)$, $(2,2,2)$, $(2,3,5)$.
   (a) Sei $h$ die Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in sich, die jeden Vektor auf sein Spiegelbild an der Ebene $E$ abbildet. Warum ist diese linear?
   (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Abbildungsmatrix von $h$.
   (c) Dasselbe für die Abbildung $p$, welche jeden Punkt in die x-y-Ebene projiziert, also $p(x,y,z) = (x,y,0)$.

**Optionale Bonusaufgabe:** Beweisen oder widerlegen Sie: Zu jedem Unterraum $U$ eines Vektorraums $V$ mit Skalarprodukt und zu jedem $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein $\mathbf{u} \in U$, dessen Abstand zu $\mathbf{v}$ minimal ist.