Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
7. Übungsblatt für den 14. Mai 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben gelöst haben.

1. Welche dieser Abbildungen ist ein Homomorphismus?

   (a) $h_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^2_2, +),\ x \mapsto \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $h_2 : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}^2_2, +, \cdot),\ x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & x \end{pmatrix}$

   (c) $h_3 : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}^2_2, +, \cdot),\ x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $h_4 : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}^2_2, +, \cdot),\ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (e) $h_5 : (\mathbb{R}^2_2, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot),\ \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \mapsto w + z$

   Wann liegt ein Epi-, Mono- oder Isomorphismus vor? Geben Sie auch jeweils Kern und Bild der Abbildung an.

2. Welcher der folgenden Unterringe sind Ideale?

   (a) $\left(\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right) \leq (\mathbb{R}^2_2, +, \cdot)$

   (b) $\left(\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right) \leq (\mathbb{R}^2_2, +, \cdot)$

   (c) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot) \leq (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

3. Sei S ein Unterring des Ringes $(R, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $\sim_S$ mit

   $$r_1 \sim_S r_2 :\Leftrightarrow r_1 - r_2 \in S$$

   genau dann eine mit $+$ und $\cdot$ verträgliche Äquivalenzrelation in R ist, wenn S ein Ideal in R ist.

4. Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie in $K[x]$:

   $$x^m - 1 \,|\, x^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad m \,|\, n$$

5. Geben Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad 3 an.

6. Bestimmen Sie $\mathrm{GGT}(f, g)$ für

   $$f = x^3 + 4x^2 + 3x,$$
   $$g = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

   in $\mathbb{R}[x]$ sowie $u, v \in \mathbb{R}[x]$ sodass $\mathrm{GGT}(f, g) = f \cdot u + g \cdot v$.

7. Bestimmen Sie alle Nullstellen und deren Vielfachheit von

$$f = x^6 + 2x^5 + 2x^2 + 2x + 6 \ \in \ \mathbb{Z}_5[x].$$

8. Stellen Sie eine Polynomfunktion auf, die duch die Punkte

$$(1,3),(2,0),(3,1),(4,0) \in \mathbb{R}^2$$

geht.