Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
10. Übungsblatt für den 11. Juni 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben (außer Zusatzaufgaben) gelöst haben.

1. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Finden Sie mittels Cramerscher Regel eine Lösung von $A \cdot x = b$.

   Finden Sie außerdem die Inverse von A (ebenfalls mit Cramerscher Regel) sowie die zu A adjungierte Matrix.

2. Gegeben seien die Vektoren $a = (1, 1, 1)$, $b = (2, 0, 1)$, $c = (3, 1, -1)$ im $\mathbb{R}^3$. Berechnen sie den Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms sowie den Rauminhalt des von allen drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds.

3. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Determinante einen Gruppenhomomorphismus $\det_{n,R} : (\mathrm{Gl}(n, R), \cdot) \to (R^*, \cdot)$ bestimmt.

   Sei S ein weiterer kommutativer Ring mit Einselemet und $h : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Finden Sie Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Gl}_{n,h} : \mathrm{Gl}(n, R) \to \mathrm{Gl}(n, S)$ und $h^* : R^* \to S^*$, sodass
$$\det_{n,S} \circ \mathrm{Gl}_{n,h} = h^* \circ \det_{n,R} .$$

4. Zeigen Sie, dass die K-Vektorräume $\mathrm{Bil}(V, W)$ und $\mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, K))$ isomorph sind.

5. Die Matrixdarstellung einer Billinearform σ bezüglich der kanonischen Basis sei
$$A_{\sigma;E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
   Finden Sie eine Basis B, bezüglich der $A_{\sigma;B,B}$ eine Diagonalmatrix ist, und finden Sie eine Faktorisierung von $A_{\sigma;E,E}$ in der Form $C^t \cdot C$.

   Ist σ positiv-/negativ/indefinit oder -semidefinit?

6. Sei (V, σ) ein euklidischer oder unitärer Raum. Zeigen Sie, dass die σ-Norm die Parallelogramm-Gleichung erfüllt:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

   Was hat diese Gleichung mit einem Parallelogramm zu tun?

7. In einem normierten Raum definieren wir

$$\langle u\,,\, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2).$$

   Unter welcher Bedingung ergibt sich damit tatsächlich ein Skalarprodukt eines euklidischen Raums?

   Formulieren Sie einen Satz, durch welchen es leicht möglich ist zu entscheiden, ob eine gegebene Norm eines reellen Vektorraums die Norm eines euklidischen Raumes ist.

   Zusatzaufgabe: Wie ist die Situation bei unitären Räumen?

8. Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm aus Beispiel 50.5 zwar tatsächlich die Gesetze einer Norm erfüllt, aber durch kein passendes inneres Produkt induziert ist.