Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
11. Übungsblatt für den 18. Juni 2012

1. (a) Welche der folgenden drei Matrizen sind kongruent zueinander?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b) Bestimmen Sie den Index und die Signatur von A, B und C.

2. Sind die folgenden beiden hermiteschen Matrizen hermitesch kongruent?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & -1-2i \\ 2 & -1+2i & 4 \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Zeigen oder widerlegen Sie:
   (a) Sind A und B symmetrisch, so ist auch AB symmetrisch.
   (b) Sind A und B positiv definit, so ist auch AB positiv definit.

4. In $V = \mathbb{R}^3$ ist der Unterraum $U := L((1,2,3),(3,0,1),(4,2,4))$ gegeben.
   (a) Bestimmen Sie $U^\perp$.
   (b) Überprüfen Sie $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

5. Sei V ein innerer Produktraum. Zeigen Sie:
   (a) Für Teilmengen $T \subseteq S \subseteq V$ von V gilt $T^\perp \supseteq S^\perp$.
   (b) $S^\perp = L(S)^\perp$ und $L(S)^\perp \leq V$.
   (c) $\{o\}^\perp = V$ und $V^\perp = \{o\}$.

6. Sei $O(n,\mathbb{R})$ die Gruppe aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Welche Menge von Matrizen bildet eine Untergruppe von $O(n,\mathbb{R})$?
   (a) Die Matrizen in $O(n,\mathbb{R})$ mit $\det A = 1$?
   (b) Die Matrizen in $O(n,\mathbb{R})$ mit $\det A = -1$?

   Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie: Für jedes $d \in \mathbb{N}$ hat $O(n,\mathbb{R})$ eine Untergruppe mit genau d Elementen.

7. Zeigen Sie, dass für Drehmatrizen $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$ gilt.

8. Zeigen Sie Satz 53.3: Für $A \in \mathbb{R}^n_n$ und das gewöhnliche innere Produkt sind folgende Bedingungen gleichbedeutend:
   (a) A ist orthogonal.
   (b) Die Zeilen von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}_n$.
   (c) Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{R}_n$.

(d) A^t ist orthogonal.

(e) $AA^t = E$

(f) $A^tA = E$

(g) A ist regulär und $A^{-1} = A^t$.

(h) Es gibt Orthogonalbasen B und C von $\mathbb{R}^n$ mit $A = A_B^C$.