Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
12. Übungsblatt für den 29. Juni 2012

Beachten Sie bitte für alle Aufgaben mit Unteraufgaben: Ankreuzen ist nur möglich, wenn Sie alle Teilaufgaben (außer Zusatzaufgaben) gelöst haben.

1. (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^n_m$ gilt

$$A = B \iff \forall x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}_n : xAy = xBy.$$

   (b) Zeigen Sie: Für alle reellen Matrizen gilt: A^tA und AA^t sind quadratisch, symmetrisch und positiv semidefinit, und sie haben dieselben nicht verschwindenden Eigenwerte.

   Hinweis: Verwenden Sie im letzten Teil z.B., dass, wenn v ein Eigenvektor von A^tA ist, dann Av ein Eigenvektor von AA^t zum selben Eigenwert ist. Kann dabei Av der Nullvektor sein?

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A. Sind die Spalten von A unabhängig?

3. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

   Entwickeln Sie eine geschlossene Formel für x_n.

4. Die lineare Abbildung $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei gegeben durch $h(v) = Av$, mit der Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   Finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch?

5. Zeigen Sie

   (a) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ (vgl. Bsp. 1e am 7. Übungsblatt);

(b) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur;

(c) Beweisen Sie Satz 57.18 (Spur als Summe der Eigenwerte).

6. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bzw. die Abbildung $h : \mathbb{R}_5 \to \mathbb{R}_5$, mit $h(v) := Av$, d.h. A ist die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Standardbasis. Bestimmen Sie

(a) die Eigenwerte von A und deren algebraische Vielfachheiten;

(b) die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten und Basen der entsprechenden Eigenräume, d.h. die Eigenvektoren;

(c) zu jedem Eigenwert, dessen geometrische Vielfachkeit kleiner ist als die algebraische, weitere Vektoren, die „fast" Eigenvektoren sind, d.h. ergänzen Sie die Basis des Kerns von $A - \lambda E$ zu einer des Kerns von $(A - \lambda E)^2$ oder, wenn notwendig, auch von $(A - \lambda E)^3$, bis die algebraische Vielfachheit erreicht ist.

(d) wie sehr sich diese zusätzlichen Basisvektoren von richtigen Eigenvektoren unterscheiden, z.B. indem Sie Au mit λu vergleichen;

(e) die Abbildungsmatrix von h bezüglich der soeben bestimmten Basis;

(f) eine Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ möglichst nahe an einer Diagonalmatrix ist.

7. Zwei Matrizen A, B (nicht notwendigerweise quadratisch) heißen zueinander pseudoinvers, wenn

$$\begin{aligned} ABA &= A & BAB &= B \\ (AB)^t &= AB & (BA)^t &= BA \end{aligned}$$

Zeigen Sie

(a) Wenn es zu A eine rechts- oder linksinverse Matrix gibt, dann auch eine pseudoinverse. Die funktioniert insbesondere, wenn A maximalen Zeilen- oder Spaltenrang hat, mit $B = A^t(AA^t)^{-1}$ bzw. $B = (A^tA)^{-1}A^t$.

(b) Finden Sie eine Formel für die Pseudoinverse einer Matrix, in der nichtverschwindende Einträge nur in der Diagonale vorkommen dürfen. Was ist insbesondere die Pseudoinverse von 0, bzw. allgemeiner einer $n \times m$-Nullmatrix?

Anmerkung: Tatsächlich gibt es zu jeder Matrix genau eine Pseudoinverse.

8. Wir möchten eine neue Zahnpasta „Dr. Worst" zusammenstellen, welche die Zähne nicht nur sauber, sondern auch weiß macht. Dazu testen wir die folgenden Zutaten zu einer Pasta-Grundlage:

   x_1: Chlor (als Bleichmittel)

   x_2: Sand (als Scheuermittel)

   x_3: Fluor (gegen Kropfbildung)

   x_4: Schweinsbratenextrakt (als Geschmacksmittel)

   Das Ergebnis y (= Zahnhelligkeit) bei verschiedenen Mengen für die Zutaten wird durch ein optisches Gerät nach 4-wöchiger Testzeit ermittelt. 15 Personen konnten durch ein vages Versprechen auf ein „free pepsi" gewonnen werden. Als Ergebis erhielten wir die folgende Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	y
12	4	6	2	222
10	3	8	3	140
8	2	2	6	80
20	1	11	1	120
4	4	21	0	80
33	0	4	0	62
5	3	0	4	70
9	5	14	2	200
1	8	19	7	50
14	2	6	4	140
14	1	8	5	80
7	3	3	3	100
4	5	7	8	90
22	2	13	2	220
8	3	19	11	100

   Wir versuchen nun, die Abhängigkeit von y von den Zutaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch einen linearen Zusammenhang auszudrücken um den ungefähren Einfluß der einzelnen Zutaten schätzen zu können, d.h. wir sind interessiert an Parametern a_1, a_2, a_3, a_4, sodass

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_2 a_3 + x_4 a_4 = y$$

   möglichst gut erfüllt ist. Bestimmen Sie diese Parameter. Gibt es Zutaten, die unwirksam oder sogar kontraproduktiv sind? Gibt es positive oder negative Synergien?

Hinweis: Für dieses Beispiel ist ein Programm zum Matrizenrechnen sehr hilfreich. Wenn Sie tatsächlich auf Ihrem Computer kein passenden installiert haben (was nicht sein sollte), nützt auch ein Online Matrix Calculator, z.B. `http://www.bluebit.gr/matrix-calculator`.