Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik

3. Übungsblatt für den 29. März 2012

(9) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S\rangle$ des Rings R gleich dem ganzen Ring R ist!
(a) $R = \mathbf{Z}$, $S = \{105, 70, 42, 30\}$.
(b) $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $S = \{(4, 3), (6, 5)\}$.
(c) $R = \mathbf{Z}[x]$, $S = \{4x + 3, 6x + 5\}$.

(10) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S\rangle$ des Rings $\mathbf{R}[x, y]$ gleich dem ganzen Ring $\mathbf{R}[x, y]$ ist!
(a) $S = \{xy, x^3y + 1\}$.
(b) $S = \{x^2y, xy^2 + 1\}$.
(c) $S = \{xy + x, 1 + y^2\}$.

(11) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
(a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
(b) Jeder Teiler eines invertierbaren Elements ist invertierbar.
(c) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.

(12) (Integritätsbereiche) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie für $r \neq 0$ die Abbildung $x \mapsto r \cdot x$.)