Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
5. Übungsblatt für den 26. April 2012

(17) In diesem Beispiel zeigen wir, dass man bei der Definition eines Rings mit Eins die Kommutativität der Addition weglassen kann. Zeigen Sie dazu folgendes:

Sei $\boldsymbol{R} = (R, +, -, \cdot, 0, 1)$ eine Algebra mit $+, \cdot$ als binären Operationen auf R, $-$ einer unären Operation auf R, und $0, 1$ Elementen aus R, sodass für alle $x, y, z \in R$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $x + 0 = x$
(2) $x + (-x) = 0$
(3) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(4) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(6) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Dann ist $\boldsymbol{R}$ ein Ring mit Eins.

Hinweis: Nutzen Sie (5) und (6) für den Ausdruck $(a + b)(c + d)$.

(18) Sei $a+b\,i \in \mathbb{Z}[i]$. Mit $\langle a+b\,i\rangle$ bezeichnen wir das von $a+b\,i$ erzeugte Hauptideal von $\mathbb{Z}[i]$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + 2i\rangle = \{\overline{0}, \overline{i}, \overline{2i}, \overline{i - 1}, \overline{2i - 1}\}$ ein Körper ist. Bestimmen Sie für jedes Element ungleich $\overline{0}$ das multiplikativ inverse Element.

(19) Konstruieren Sie die Multiplikationstabelle (das „Einmaleins“) des Ringes $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}_2[t]/\langle t^3 + t + 1\rangle$. Dabei ist $\langle t^3 + t + 1\rangle$ das von $t^3 + t + 1$ erzeugte Hauptideal des Polynomrings $\mathbb{Z}_2[t]$ über dem Körper $\mathbb{Z}_2$. Ist $\boldsymbol{R}$ ein Körper?

(20) Wieviele Elemente haben die folgenden Faktorringe?

(a) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i\rangle$
(b) $\mathbb{Z}[i]/\langle 3 + 4i\rangle$

Bonusfrage: Wieviele Elemente hat $\mathbb{Z}[i]/\langle a + bi\rangle$, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$?