Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
9.Übungsblatt für den 31. Mai 2012

(33) (a) Zeigen Sie, dass jede zyklische Gruppe auch abelsch ist.
(b) Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit $|G| = p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.
(c) Zeigen Sie, dass das homomorphe Bild einer zyklischen Gruppe wieder zyklisch ist.

(34) Sei $p \in \mathbb{P}$. Finden Sie **alle** Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{p^2}, +)$.

(35) (a) Sei X eine nichtleere Menge und sei $S(X) = \{f : X \to X : f \text{ bijektiv}\}$. Sei $G \subseteq S(X)$ eine Untergruppe von $S(X)$. Zeigen Sie, dass $* : G \times X \to X$, $f * x = f(x)$, eine Gruppenoperation ist.
(b) Zeigen Sie, dass durch $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(\alpha, \boldsymbol{x}) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

eine Gruppenoperation von $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben ist. Wie sehen die Orbits aus?
(c) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass durch $* : G \times G \to G$, $g * x = g \circ x \circ g^{-1}$ eine Gruppenoperation von $(G, \circ)$ auf G gegeben ist, die sogenannte *Konjugation*. Die Orbits nennt man hier *Konjugationsklassen*.

(36) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Ecken eines regelmäßigen 6-Ecks mit höchstens c Farben zu färben, wobei wir zwei Färbungen als gleich betrachten, wenn sie durch eine Drehung des 6-Ecks oder durch eine Spiegelung an einer der Symmetrieachsen des 6-Ecks ineinander übergeführt werden können?