Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Algebra und Diskrete Mathematik
10.Übungsblatt für den 14. Juni 2012

(37) Seien $n, c \in \mathbb{N}$. Wieviele Muster entstehen bei der Färbung eines $n \times n$ Schachbretts mit (höchstens) c Farben, wobei man zwei Färbungen als gleich betrachtet, wenn sie durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können? *Hinweis:* Unterscheiden Sie die Fälle n gerade und n ungerade.

(38) (a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, und sei $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $(G, \circ)$. Seien $a, b \in G$ so, dass $a \sim b$. Zeigen Sie $a^{-1} \sim b^{-1}$.

(b) Bestimmen Sie, ob die folgenden Untergruppen Normalteiler von $(S_3, \circ)$ sind:

(i) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$;

(ii) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

(39) (a) Sei $\varphi : (G, \circ) \to (H, \bullet)$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\ker(\varphi) = \{1_G\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, \cdot)$, $\psi(t) = \exp(2\pi \mathtt{i} t)$, wobei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, ein Homomorphismus ist und bestimmen Sie $\ker(\psi)$.

(40) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass das sogenannte *Zentrum* $Z(G)$ von G definiert durch

$$Z(G) = \{z \in G : z \circ g = g \circ z \; \forall g \in G\}$$

ein Normalteiler von G ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $G \to S_G$, $g \mapsto f(g)$ wobei $f(g)(x) = g \circ x \circ g^{-1}$.