Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
11. Übungsblatt für den 21. Juni 2012

(41) Wir färben die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit den Farben rot und blau so, dass drei Ecken rot und drei Ecken blau sind. Zwei Färbungen des Sechsecks seien gleich, wenn sie durch Drehung ineinander übergeführt werden können. Wieviele Färbungen gibt es?

(42) Wir färben Flächen eines Würfels.

(a) Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, wenn wir zwei Farben nehmen und zwei Färbungen als gleich betrachten, wenn sie durch eine Symmetrieoperation des Würfels ineinander übergeführt werden können. Dabei operiert auf den Flächen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ des Würfels die Untergruppe der S_6, die von $(4, 2, 3, 5), (1, 2, 6, 5), (3, 1, 4, 6)$ erzeugt wird. Ihre Elemente entnehmen Sie dem folgenden Dialog mit GAP (steht für Groups - Algorithms -Programming, ein in Aachen und St. Andrews entwickeltes, im wesentlichen frei verfügbares Gruppentheoriesystem [1]):

```
gap> G := Group ((4,2,3,5), (1,2,6,5), (3,1,4,6));
Group([ (2,3,5,4), (1,2,6,5), (1,4,6,3) ])
gap> Size (G);
24
gap> AsList (G);
[ (), (2,3,5,4), (2,4,5,3), (2,5)(3,4), (1,2)(3,4)(5,6), (1,2,3)(4,6,5),
  (1,2,4)(3,6,5), (1,2,6,5), (1,3,2)(4,5,6), (1,3,6,4), (1,3)(2,5)(4,6),
  (1,3,5)(2,6,4), (1,4,2)(3,5,6), (1,4,6,3), (1,4)(2,5)(3,6),
  (1,4,5)(2,6,3),
  (1,5,6,2), (1,5,4)(2,3,6), (1,5,3)(2,4,6), (1,5)(2,6)(3,4), (1,6)(3,4),
  (1,6)(2,3)(4,5), (1,6)(2,4)(3,5), (1,6)(2,5) ]
```

(b) Wieviele verschiedene Färbungen gibt es mit 3, wieviele mit n Farben?

(43) Weisen Sie jeweils nach, dass N ein Normalteiler der Gruppe G ist, indem Sie einen Homomorphismus φ von G in eine Gruppe angeben, dessen Kern N ist. Bestimmen Sie auch das Image von φ und damit eine Gruppe, zu der G/N isomorph ist.

(a) $G := \mathrm{GL}(n, p) = \{A \in {\mathbb{Z}_p}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$; $N := \mathrm{SL}(n, p) = \{A \in {\mathbb{Z}_p}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$.

(b) $G = S_n$; $N = A_n = \{\pi \mid \pi \in S_n, \pi \text{ ist gerade Permutation}\}$.

(c) $G := (\mathbb{Z}, +)$; $N := \{5 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

(44) Benutzen Sie den Satz von Ramsey, um folgenden Satz zu zeigen.

Sei $t \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass es für jede Aufteilung der Menge $\{1, 2, \ldots, N\}$ in t Klassen eine Klasse gibt, die zwei verschiedene Zahlen und deren Summe enthält.

Literatur

[1] The GAP Group, Aachen, St. Andrews. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.1*, 1999. (http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap).