Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
12. Übungsblatt für den 28. Juni 2012

(45) (a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$. Wieviele Färbungen der Ecken eines regelmäßigen p-Ecks mit n Farben gibt es, wenn wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch eine Drehung um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{p}$ ineinander übergehen? Benutzen Sie das Ergebnis, um $p \mid (n^p - n)$ zu zeigen.

(b) Seien $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$, $1 < k < p$. Wieviele Färbungen der Ecken eines regelmäßigen p-Ecks mit den Farben rot und blau gibt es, sodass genau k Ecken rot sind? Dabei sehen wir zwei Färbungen als gleich an, wenn sie durch eine Drehung um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{p}$ ineinander übergehen. Benutzen Sie das Ergebnis, um $p \mid \binom{p}{k}$ zu zeigen.

Hinweis: Jedes Element x aus der von $(1\,2\,\ldots\,p)$ erzeugten Untergruppe von S_p mit $x \neq \mathrm{id}$ besteht aus einem einzigen p-Zyklus.

(46) Seien $p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}$ so, dass m kein Vielfaches von p ist. Wir färben die Ecken eines regelmäßigen $(p \cdot m)$-Ecks so mit den Farben rot und blau, dass genau p Ecken rot sind. Wieviele solche Färbungen gibt es, wenn wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch eine Drehung um ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{p}$ ineinander übergehen? Benutzen Sie das Ergebnis, um zu zeigen, dass $\binom{p\,m}{p} \equiv m \pmod{p}$.

(47) Sei $f \in \mathbb{Q}[t]$ so, dass $\mathbb{Q}[t]/(f)$ ein Körper ist.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[t]$ kein Ideal I mit $(f) \subset I \subset \mathbb{Q}[t]$ besitzt.

(48) Sei $p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie, dass folgende Polynome aus $\mathbb{Q}[t]$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind.

(a) $a = t^5 - 9\,t + 3$.

(b) $b = \frac{(t+1)^p - 1}{t}$.

(c) $c = \frac{t^p - 1}{t-1} = \sum_{i=0}^{p-1} t^i$.

(d) (Bonus) $d =$ ein Polynom minimalen Grades in $\{p \in \mathbb{Q}[t] \mid p \neq 0, \hat{p}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0\}$.