Übung 3

1. Untersuchen Sie,ob eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe vorliegt:

   (a) $(\mathbb{Z}, -)$

   (b) $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y := x$

   (c) $(\mathbb{R} - \{-1\}, \circ), x \circ y := x + y + xy$

2. Seien $(G_1, \circ_1), (G_2, \circ_2)$ Gruppen mit den neutralen Elementen n_1, n_2.Zeigen Sie,dass $G_1 \times G_2 = \{(x, y) : x \in G_1, y \in G_2\}$ durch $(a, b) \circ (c, d) := (a \circ_1 c, b \circ_2 d)$ ebenfalls eine Gruppe ist.

3. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $x, y, z \in G$.Zeigen Sie:

   (a) Aus $x \circ y = x \circ z$ folgt $y = z$.

   (b) Aus $y \circ x = z \circ x$ folgt $y = z$.

4. Finden Sie ein Beispiel für einen Körper K mit $\mathbb{Q} \subsetneqq K \subsetneqq \mathbb{R}$.

5. Untersuchen Sie,welche der Mengen U Unterräume des angegebenen Vektorraums V sind.

   (a) $U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(-1) = f(1) = 0\}, V =$Vektorraum der reellen Funktionen

   (b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqq 0\}, V = \mathbb{R}^3$.