Übung 4

1. Bestimmen Sie eine Basis für den angegebenen Vektorraum:

   (a) Der Unterraum des $\mathbb{R}^5$,welcher aus allen Lösungen des linearen Gleichungssystems

   $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_4 - x_5 &= 0 \quad \text{besteht.} \end{aligned}$$

   (b) $L(S)$ für $S = \{(1,1,0,1), (2i-1, 2i, -i, 2i), (-i, 0, 0, i+1), (i, i, 0, -1)\} \subseteq \mathbb{C}^4$.

   (c) $L(S)$ für $S = \{(3,1,0,-1), (0,-2,-3,5), (2,0,-1,1), (5,1,-1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2. Zeigen Sie für Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraums V :

   (a) $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum, i.a. aber nicht $U_1 \cup U_2$.

   (b) $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum.Zeigen Sie weiters,dass für Basen B_1 von U_1, B_2 von U_2 , $L(B_1 \cup B_2) = U_1 + U_2$ gilt.

3. Bestimmen Sie $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ für die Ebenen $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$, $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + z = 0\}$.

4. Überprüfen Sie,ob die Menge $\{f, g, h\}$ linear unabhängig im Vektorraum $C(\mathbb{R})$ der reellen stetigen Funktionen ist.

   (a) $f(x) = 1 - x, g(x) = x(1-x), h(x) = 1 - x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = 1, g(x) = e^x, h(x) = e^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.