Übung 6

1. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf der Menge
   $A = \mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen, ein Repräsentantensystem und die Faktormenge.Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

   (a) $(a, b, c) \sim (d, e, f) :\Longleftrightarrow b = e$ und $c = f$.

   (b) Zwei Punkte P, Q im $\mathbb{R}^3$ heißen äquivalent, falls sie entweder gleich, oder aber, wenn $P \neq 0, Q \neq 0, P \neq Q$ ist, die Gerade durch die beiden Punkte den Nullpunkt enthält.

2. Zeigen Sie ausführlich, dass V/U mit den Operationen $(v + U) \oplus (w + U) :=$
   $(v + w) + U$, $\lambda \odot (v + U) := \lambda \cdot v + U$, $v, w \in V, \lambda \in K$, ein Vektorraum ist.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und U der Unterraum $U = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$.

   (a) Interpretieren Sie die Äquivalenzklassen $v + U$ bzgl. $\sim_U$ geometrisch.

   (b) Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem bzgl. $\sim_U$ und den Faktorraum V/U.

4. Sei $V = P_3(\mathbb{R})$ und U der Unterraum $U = L(\{x^2 + 1, 2 - x\})$.
   Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem bzgl. $\sim_U$ und den Faktorraum V/U.

5. Sei V ein Vektorraum und $\sim$ eine verträgliche Äquivalenzrelation auf der Menge V. Zeigen Sie:

   (a) $U = \{v \in V : v \sim 0\}$ ist ein Unterraum von V.

   (b) Es gilt $\sim \; = \; \sim_U$ (Gleichheit als Mengen).

   (Damit ist jede verträgliche Äquivalenzrelation auf V von der Form $\sim_U$ für einen Unterraum U.)