Übung 7

1. Geben Sie für den Ring $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$ die Operationen $" \oplus ", " \odot "$ in Tabellenform an. Ist dieser Ring ein Körper ?

2. Sei $a = 349, b = 73.$

   (a) Stellen Sie $ggT\,(a,b)$ als Linearkombination $ggT\,(a,b) = a.x + b.y$ für ein $x, y \in \mathbb{Z}$ dar.

   (b) Berechnen Sie $[73]^{-1}$ im Ring $(\mathbb{Z}_{349}, \oplus, \odot)$, falls existent.

3. Untersuchen Sie, ob die Menge R mit den angegebenen Operationen ein Ring, Ring mit Einselement, oder ein kommutativer Ring mit Einselement ist:

   (a) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Addition und Multiplikation von Matrizen.

   (b) $R = F\,(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist eine Funktion}\}, (f+g)\,(x) := f\,(x) + g\,(x), (f.g)\,(x) := f\,(x).g\,(x), x \in \mathbb{R}.$

   (c) $R = F\,(\mathbb{R})$, mit der Addition aus Teil b. und der Hintereinanderausführung von Funktionen $(f \circ g)\,(x) := f\,(g\,(x)), x \in \mathbb{R}.$

4. Sei $(R, +, .)$ ein Ring. Zeigen Sie für alle $a, b \in R$:

   (a) $a.0 = 0.a = 0$

   (b) $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$

5. Sei $\sim$ eine verträgliche Äquivalenzrelation auf dem Ring $(R, +, .)$. Zeigen Sie,dass dann auch $(R/\sim, \oplus, \odot)$ ein Ring ist. Falls R ein Einselement besitzt bzw. kommutativ ist, dann trifft dies auch auf $R/\sim$ zu.