Übung 8

1. Zeigen oder widerlegen Sie für Matrizen A, B, C (sofern alle Summen und Produkte definiert sind):

   (a) $A.(B+C) = A.B + A.C$, $(A+B).C = A.C + B.C$

   (b) $(A^n)^t = (A^t)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $(A+B)^2 = A^2 + 2A.B + B^2$.

2. Geben Sie Beispiele für Matrizen A mit der Eigenschaft:

   (a) $A \neq 0, A^2 = 0$.

   (b) $A^2 \neq 0, A^3 = 0$.

   Ist es möglich, invertierbare Matrizen mit diesen Eigenschaften zu finden ?

3. Zeigen Sie: $U := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}_2^2$. Welche Dimension hat U ?

4. Sei K ein Körper, $A \in K_m^n$. $s_1, s_2, ..., s_n$ bezeichne die Spalten von A und $z_1, z_2, ..., z_m$ die Zeilen von A. Zeigen Sie:

   (a) $\{x.A : x \in K^m\} = L\{z_1, z_2, ..., z_m\}$.

   (b) $\{A.x : x \in K_n\} = L\{s_1, ..., s_n\}$.

5. Zeigen Sie für $A \in K_m^n, B \in K_n^p$:

   $Rg(A.B) \leq Rg(A), Rg(A.B) \leq Rg(B)$.