**Informations- und Codierungstheorie**
**1. Übungsblatt für den 9. Oktober 2012**

1. (Kanalcodierung) Wir verwenden einen Übertragungskanal, der 0 und 1 überträgt, und bei dem mit Wahrscheinlichkeit 0.9 das ausgegebene Zeichen mit dem eingegebenen übereinstimmt, mit Wahrscheinlichkeit 0.1 aber das falsche andere Zeichen ankommt.

   (a) Begründen Sie, dass es durch wiederholtes Senden jedes Bits möglich ist, die Rate der falsch übertragenen Nachrichtenbits kleiner als $10^{-15}$ werden zu lassen.

   (b) Wieviele Bits müssen Sie dabei über den Kanal senden, um 1 Nachrichtenbit zu übertragen?

2. Sie haben den binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit 0.1 zur Verfügung. Sie verwenden diesen Kanal mit Rate $R$. (Sie verwenden also $m \cdot \frac{1}{R}$ Kanalbits, um $m$ Nachrichtenbits zu übertragen.)

   (a) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 0.52$ nicht unterschreiten?

   (b) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 0.6$ nicht unterschreiten?

   (c) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 1$ nicht unterschreiten?

   (d) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 100$ nicht unterschreiten?

3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Ein Komprimierungsprogramm nimmt Fehler in Kauf und komprimiert jede Datei mit $m$ Bits auf eine Datei mit $\frac{2m}{3}$ Bits. Wieviele Bits werden, im Durchschnitt über alle Files der Länge $m$, durch Komprimieren und Dekomprimieren mindestens verändert? *Hinweis:* Das Komprimierungsprogramm erlaubt Ihnen, den fehlerfreien binären Kanal mit Rate $R = \frac{3}{2}$ zu verwenden. Was können Sie über die Bitfehlerrate $b$ aussagen?

4. Sei $(\Omega, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$. Zeigen Sie

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r) \in \{1,\ldots,n\}^r \\ i_1 < \cdots < i_r}} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}).$$

5. Sei $C : [0,1] \to [0,1]$, $C(x) := 1 + x \log_2(x) + (1-x)\log_2(1-x)$ für $x \in (0,1)$, $C(0) = C(1) = 1$. Skizzieren Sie $C$. Zeigen Sie, dass $C$ stetig und konvex ist.