

Informations- und Codierungstheorie
6. Übungsblatt für den 14. November 2012

1. Konstruieren Sie – etwa mit dem Verfahren von Huffman – optimale binäre Codes für folgende Wahrscheinlichkeiten, berechnen Sie die durchschnittliche Codewortlänge, und vergleichen Sie diese durchschnittliche Länge mit der Entropie.

(a) [Ash, 1990] $(0.3, 0.25, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05)$

(b) $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$.

(c) [Ash, 1990] $(.2, .18, .1, .1, .1, .061, .059, .04, .04, .04, .04, .03, .01)$.

2. (a) [Ash, 1990] Konstruieren Sie einen optimalen Code über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ für die Wahrscheinlichkeiten

$(0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.08, 0.05, 0.02)$.

- (b) Konstruieren Sie einen optimalen Code über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ für die Wahrscheinlichkeiten

$(0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.08, 0.05, 0.02)$.

3. [Ash, 1990] Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Codewortlänge \bar{n} eines optimalen binären Codes für die Ausgänge von X immer $\bar{n} \leq H(X) + 1$ erfüllt.
4. [Cover and Thomas, 2006, Problem 5.21] Zeigen Sie, dass eine Codierung $C : \mathcal{X} \rightarrow D^*$ genau dann eindeutig decodierbar ist, wenn die Erweiterung

$$C^k(x_1, x_2, \dots, x_k) = C(x_1)C(x_2) \dots C(x_k)$$

für jedes $k \geq 1$ eine injektive Abbildung von \mathcal{X}^k nach D^* ist. (Eine der beiden Implikationen ist offensichtlich.)

5. (cf. [Cover and Thomas, 2006, Problem 5.25]) Seien $p_1 > p_2 \geq p_3 \geq p_4$ so, dass $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ und $p_1 > \frac{2}{5}$. Zeigen Sie, dass in einem mit dem Huffman-Algorithmus erzeugten optimalen binären Code (C_1, C_2, C_3, C_4) für (p_1, p_2, p_3, p_4) das Wort C_1 Länge 1 hat.

Literatur

[Ash, 1990] Ash, R. B. (1990). *Information theory*. Dover Publications Inc., New York. Corrected reprint of the 1965 original.

[Cover and Thomas, 2006] Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006). *Elements of information theory*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition.