

**Informations- und Codierungstheorie**  
**8. Übungsblatt für den 27. November 2012**

1. In diesem Beispiel arbeiten wir an einer Interpretation für  $H(X|Y)$ . Dazu gehen wir von folgendem Experiment aus: Seien  $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_M\}$  und  $Y : \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_L\}$  Zufallsvariablen. Wir wollen die Ausgänge von  $X$  einem Empfänger übertragen, dem die Ausgänge von  $Y$  bereits bekannt sind.

(Das kann man sich so vorstellen: wir wollen dem Empfänger mitteilen, ob das Rouletterad auf "gerade" oder "ungerade" gefallen ist, wissen aber, dass der Empfänger bereits weiß, ob das Rad auf "rot" oder "grün" gefallen ist).

Wie übermitteln Sie dem Empfänger die Ausgänge von  $X$  so, dass Sie durchschnittlich nur höchstens  $H(X|Y) + 1$  Zeichen pro Ausgang von  $X$  und  $Y$  brauchen?

2. Geben Sie, wenn möglich, jeweils ein Beispiel für Zufallsvariablen  $X, Y$  an, die folgende Bedingungen erfüllen.

- (a)  $I(X; Y) = H(X)$ ;
- (b)  $I(X; Y) > H(X)$ ;
- (c)  $I(X; Y) = 0$ ;
- (d)  $I(X; X) = 0$ .

3. [Ash, 1990, Beispiel 1.2] A single unbiased die is tossed once. If the face of the die is 1,2,3, or 4, an unbiased coin is tossed once. If the face of the die is 5 or 6, the coin is tossed twice. Find the information conveyed about the face of the die by the number of heads obtained.

*Hinweis:* Eine Möglichkeit, dieses Experiment zu beschreiben, ist, als Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$

mit  $P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = \frac{1}{24}$  für alle  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$  zu wählen. Die Zufallsvariable  $Y$  soll die Anzahl der Köpfe angeben.

4. Wir betrachten das Senden eines Bits über einen binären Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit  $p$ . Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen, die die Eingabe und Ausgabe beschreiben. Wir nehmen also an, dass  $P[X = 0] = P[X = 1] = \frac{1}{2}$ ,  $P[Y = 0|X = 0] = P[Y = 1|X = 1] = 1 - p$ ,  $P[Y = 1|X = 0] = P[Y = 0|X = 1] = p$ .

- (a) Berechnen Sie  $C(p) := I(X; Y)$  für alle  $p \in [0, 1]$ .
- (b) Skizzieren Sie die Funktion  $C(p)$ , und bestimmen Sie ihre Maxima und Minima.

## Literatur

[Ash, 1990] Ash, R. B. (1990). *Information theory*. Dover Publications Inc., New York. Corrected reprint of the 1965 original.