Informations- und Codierungstheorie
12.Übungsblatt für den 15. Jänner 2013

(1) Sei $c_3 > c_2 > 0$. Zeigen Sie
$$\lim_{n\to\infty} (1 - 2^{-nc_2})^{2^{nc_3}} = 0.$$

Aus den Sätze von Shannon kann man auch Resultate für das *diskrete Kugelpackungsproblem* herleiten. Seien dazu $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$. Die *Hamming-Distanz* von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert durch
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ x_i \neq y_i\}|,$$
also als die Anzahl der Stellen, an denen sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ unterscheiden. Für einen Code $\mathcal{C} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)}) \in (\{0,1\}^n)^s$ ist die Minimaldistanz von $\mathcal{C}$ gegeben durch
$$d_{\min}(\mathcal{C}) = \min \{d(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \,|\, i \neq j\}.$$

(3) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $p \in [0, \frac{1}{2})$, und sei $\varepsilon > 0$. Wir nehmen an, dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Code $\mathcal{C}_n = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s(n))}) \in (\{0,1\}^n)^{s(n)}$ mit Minimaldistanz $d_{\min}(\mathcal{C}_n) \geq 2np + 1$ haben. Bauen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus diesen $s(n)$ Codewörtern ein Übertragungssystem für Nachrichten mit $\lfloor \log_2(s(n)) \rfloor$ Bits und n-maliger Verwendung des Kanals mit Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 - (p - \varepsilon) & (p - \varepsilon) \\ (p - \varepsilon) & 1 - (p - \varepsilon) \end{pmatrix},$$
sodass die Bitfehlerrate $p_B(n)$ die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} p_B(n) = 0$ erfüllt. *Hinweis:* Für große n ist es sehr unwahrscheinlich, dass np Bits bei der Übertragung umfallen.

(4) Sei $A(n, d)$ das maximale $s \in \mathbb{N}_0$, sodass es einen binären Code mit s Codewörtern der Länge n und Minimaldistanz $\leq d$ gibt. (Bsp.: $(A(n, 0) = \infty$, $A(n, 1) = 2^n$, $A(n, n) = 2)$. Zeigen Sie
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, 2np + 1))}{n} \leq 1 - H(p). \tag{A}$$
Hinweis: Es reicht, dass für alle ε gilt:
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, 2np + 1))}{n} \leq 1 - H(p - \varepsilon).$$
Die Rate des n-ten Übetragungssystems aus Beispiel (3) ist $\frac{\lfloor \log_2(s(n)) \rfloor}{n}$. Für $s(n) := A(n, 2np + 1)$ erhalten wir ein Übetragungssystem mit Rate $R(n) := \frac{\lfloor \log_2(A(n,2np+1)) \rfloor}{n}$ für einen Kanal mit Kapazität $1 - H(p - \varepsilon, 1 - (p - \varepsilon))$. Somit gilt $H(p_B(n)) \geq 1 - \frac{1 - H(p-\varepsilon, 1-(p-\varepsilon))}{R(n)}$. Betrachten sie nun den Limes superior für $n \to \infty$.

(5) Folgern Sie aus der Ungleichung (A), dass für alle $\delta \in [0, 1]$ gilt:
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, n\delta))}{n} \leq 1 - H(\frac{\delta}{2}).$$