Algebra für Informatik (2013W)

3. Übungsaufgaben

für den 17. April 2013

1. Untersuchen Sie, ob eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe vorliegt:

   (a) $(\mathbb{Z}, -)$;

   (b) $(\mathbb{R}, \circ)$, mit $x \circ y := x$;

   (c) $(\mathbb{Z}, \centerdot)$, mit $x \centerdot y := 0$;

   (d) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$, mit $x \star y := x + y + xy$.

2. $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ seien Gruppen. Zeigen Sie, dass dann $G_1 \times G_2 := \{ (x, y) : x \in G_1, y \in G_2 \}$ mit

   $$(a, b) \circ (c, d) := (a \circ_1 c,\ b \circ_2 d)$$

   ebenfalls eine Gruppe bildet.

3. $(G, \circ)$ sei eine Gruppe. Zeigen Sie, dass diese die *Kürzungsregeln* erfüllt, d.h. für alle $x, y, z \in G$ gelten

   $$x \circ y = x \circ z \implies y = z,$$
   $$y \circ x = z \circ x \implies y = z.$$

   Finden Sie umgekehrt ein Monoid, welches beide Kürzungsregeln erfüllt und dennoch keine Gruppe ist.

4. Sei $M = \{0, 1, 2\}$. Wir betrachten das Monoid $F := (M^M, \circ)$.

   (a) Ist dieses Monoid kommutativ?

   (b) Bestimmen Sie dessen Gruppenkern (durch Aufzählen aller Elemente). Ist dieses kommutativ?

   (c) Finden Sie die idempotenten Elemente von F.

   (d) Geben Sie mindestens 3 kommutative Unterhalbgruppen von F an.

   Zusatzfrage: Können Sie eine kommutative Unterhalbgruppe von F angeben, die zwar eine Gruppe ist, aber dennoch keine Untergruppe, sogar kein Untermonoid, von F ist?

5. Es sei L die Menge aller ganzzahligen Lösungen von

   $$7x + 5y = 0.$$

   Ist L eine Unterhalbgruppe, ein Untermonoid, eine Untergruppe von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ bzw. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \cdot)$? (Die Verknüpfungen seien komponentenweise definiert, so wie in Beispiel 2.)

6. Mit $d_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn) mit Zentrum im Ursprung.

   (a) Zeigen Sie, dass $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ eine Unterhalbgruppe von $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ ist.

   (b) Sei weiters $s_\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung, welche mit der x-Achse den Winkel β einschließt. Bilden auch die Spiegelungen eine Untergruppe?

   Zusatzfrage: Können Sie eine einfache Formel für $s_\alpha \circ s_\beta$ angeben?