Algebra (Informatik)
4. Übungsblatt für den 22. April 2013

(1) Wir definieren auf $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ folgende Operationen:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) * (b_1, b_2) &:= (a_1 b_1 - 2a_2 b_2,\ a_2 b_1 + a_1 b_2 - 2a_2 b_2).\end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, *)$ ein kommutativer Ring mit Einselement. In diesem Beispiel prüfen wir dazu einige Eigenschaften nach.

(a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation $*$ assoziativ ist.

(b) Finden Sie das Einselement der Multiplikation.

(2) (Polynomdivision) Sei $R := \mathbb{Z}_4$, und seien $a, b \in \mathbb{Z}_4[x]$ gegeben durch

$$a := x^7 + 2x^6 + 3x^5 + x^3 + 2x^2 + 4x,\ \ b := x^2 + 2x + 3.$$

Finden Sie Polynome q (Quotient) und r (Rest) in $\mathbb{Z}_4[x]$, sodass $a = b\,q + r$, und sodass der Grad des Restes höchstens 1 ist.

(3) (Polynomdivision) Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und seien $a, b \in R[x]$ so, dass der Koeffizient der höchsten Potenz von x in b gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass es $q, r \in R[x]$ gibt, sodass $a = b\,q + r$, und sodass $r = 0$ oder der Grad von r kleiner als der Grad von b ist. *Hinweis:* Wie würden Sie algorithmisch vorgehen, um q und r zu finden? Zum Beweis: Gehen Sie mit Induktion nach dem Grad von a vor!

(4) Sei A eine Menge, und sei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A. Zeigen Sie, dass der Ring $(\mathcal{P}(A), \Delta, \cap)$ genau dann ein Körper ist, wenn A einelementig ist.

(5) Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $n \mid (a_1 - a_2)$ und $n \mid (b_1 - b_2)$. Zeigen Sie, dass $n \mid (a_1 b_1 - a_2 b_2)$. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $n \mid (a_1 b_1 - a_1 b_2)$. Was fehlt dann noch zur Lösung?

(6) (a) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}_5$!

$$x + 2y = 1, 4x + 3y = 4, 3x + 2y + z = 0.$$

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x + 2y = 1, 4x + 3y = 4, 3x + 2y + z = 0.$$

über dem Körper $\mathbb{Q}$.