# 5.Übungsblatt für den 29.April 2013

1. Sei $M$ eine nichtleere Menge, $R$ ein Ring mit Einselement und $F(M,R) :=$ $\{f \,|\, f : M \longrightarrow R \text{ eine Funktion}\}$. Überprüfen Sie, ob $(F(M,R), +, \cdot)$ mit $f + g : M \longrightarrow R, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$ (Addition in $R$), und $f \cdot g : M \longrightarrow R, (f \cdot g)(x) := f(x) . g(x)$ (Multiplikation in $R$), ein Ring mit Einselement ist. Wann ist $F(M,R)$ kommutativ?

2. Sei $\mathbb{Z}_{10}$ der Ring der ganzen Zahlen modulo 10 und $S = \{0, 2, 4, 6, 8\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$. Überprüfen Sie, ob $S$ ein Unterring von $\mathbb{Z}_{10}$ ist. Besitzt $S$ ein Einselement?

3. Sei $R$ ein Ring und $S, T$ Unterringe von $R$. Zeigen Sie, dass $S \cap T = \{x \in R \,|\, x \in S \text{ und } x \in T\}$ ein Unterring von $R$ ist.(Hinweis: Verwenden Sie das Unterringkriterium.) Ist auch $S \cup T$ stets wieder ein Unterring?

4. Finden Sie einen Ring $R$ und $0 \neq x \in R, 0 \neq y \in R$, sodass $x.y = 0$ gilt. Kann man solche Elemente $x, y$ auch in einem Körper finden?

5. Ist das Element 25 im Ring $\mathbb{Z}_{36}$ invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie das inverse Element.

6. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen $V$ mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum über dem Körper $K$ bilden:

   **(a)** $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$, mit der gewöhnlichen komponentenweisen Addition auf $\mathbb{R}^3$ und der skalaren Multiplikation $\lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, y, z)$.

   **(b)** $V = \left\{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}, K = \mathbb{Q}$, mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

   **(c)** Wie in b. mit $K = \mathbb{R}$.