Algebra (Informatik)

6. Übungsblatt für den 6. Mai 2013

(1) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3\,x + 2\,y = 0\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3\,x + 2\,y = 1\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x,y) = (0,0) + \lambda \cdot (1,3)\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x,y) = (-4,-12) + \lambda \cdot (1,3)\}$.

(e) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

(2) Zeigen Sie: Wenn ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$) zwei Punkte enthält, so enthält er bereits die gesamte Verbindungsgerade.

(3) (a) Liegt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\}$?

(b) Liegt $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$?

(c) Testen Sie, ob $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ liegt.

(4) Testen Sie jeweils, ob folgende Mengen von Vektoren linear abhängig sind. Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt und bei der nicht jeder Vektor mit 0 multipliziert wird.

(a) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$.

(b) $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

(c) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}\}$.

(5) Seien v_1, v_2, w drei voneinander verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass w in der linearen Hülle von $\{v_1, v_2\}$ liegt. Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, v_2, w\}$ dann linear abhängig ist.

(6) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccccc} 0x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +7x_4 & +3x_5 & +5x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +6x_5 & +10x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +3x_5 & +5x_6 & = & 0 \end{array}$$

und geben Sie Vektoren an, deren lineare Hülle diese Lösungsmenge ist.

(7) Sei $V = C^2(]0,1[)$ der Vektorraum aller Funktionen von $]0,1[$ nach $\mathbb{R}$, deren 2. Ableitung in jedem Punkt von $]0,1[$ existiert. Zeigen Sie, dass

$$\{f \in V \mid \text{ für alle } x \in]0,1[\text{ gilt } f''(x) = -f(x)\}$$

einen Unterraum von V bildet. *Zusatzfrage:* Finden Sie ein Element in $V - \{0\}$?