Algebra für Informatik (2013S)

7. Übungsaufgaben

für den 13. Mai 2013

1. (a) Zeigen Sie detailliert, dass die Vektoren $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ der kanonischen Basis tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Welche Koordinaten hat $(4,7)$ bezüglich dieser Basis?

   (b) Sei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ wie zuvor. Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

   (c) Welcher Vektor hat die Koordinaten $(3,5)$ bezüglich dieser Basis?

   (d) Sei nun $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass dann auch $\{\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2\}$ eine Basis ist.

   Fertigen Sie zu allen Teilen eine Skizze an und interpretieren Sie geometrisch.

2. Es seien die Vektoren $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,1)$, $\mathbf{u}_3 = (3,5,2)$, $\mathbf{u}_4 = (4,3,0)$ gegeben, und es sei $U = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$.

   (a) Bilden Sie $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - 3\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - 4\mathbf{u}_1$. Warum ist $U = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$?

   (b) Bilden Sie $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}_4 = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_2$. Wählen Sie aus diesen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus.

   (c) Welcher Vektor hat die Koordinaten $(1,2,3)$ bezüglich dieser Basis?

   (d) Welche Koordinaten hat der Vektor $(1,0,0)$ bezüglich dieser Basis?

3. U sei der durch die Vektoren $(0,-1,2,7,3,5)$, $(0,-2,4,4,6,10)$ und $(0,-1,2,4,3,5)$ aufgespannte Untervektorraum der $\mathbb{R}^6$.

   (a) Bestimmen Sie eine Basis B von U

   (b) Erweitern Sie B zu einer Basis C von $\mathbb{R}^6$.

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten von $(0,1,0,0,0,0)$ bezüglich C.

   (d) Liegt $(0,1,0,0,0,0)$ in U.

   Vergleichen Sie auch mit Beispiel (6) von letzter Woche.

4. Gegeben sei

   (a) $\mathbf{b}_1 = (1,2,0,0)$, $\mathbf{b}_2 = (1,3,1,0)$, $\mathbf{b}_3 = (1,4,0,1)$;

   (b) $\mathbf{b}_1 = (1,2)$, $\mathbf{b}_2 = (1,3)$, $\mathbf{b}_3 = (1,4)$;

   (c) $\mathbf{b}_1 = (1,2,0)$, $\mathbf{b}_2 = (1,3,0)$, $\mathbf{b}_3 = (1,4,0)$.

   (d) $\mathbf{b}_1 = (1,2,0)$, $\mathbf{b}_2 = (1,3,0)$, $\mathbf{b}_3 = (1,4,1)$.

   In jedem Fall definieren wir

   $$h(\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,1).$$

   In welchen Fällen wird dadurch eine Funktion von $\mathbb{R}^4$ (bzw. $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) nach $\mathbb{R}^2$ definiert?

5. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und darin die Menge $B = \{e_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$, wobei für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte: $e_x(x) = 1$ und $e_x(y) = 0$, für $y \neq x$. Bildet B eine Basis von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?