Algebra (Informatik)
8. Übungsblatt für den 27. Mai 2013

(1) Finden Sie eine Basis B der Ebene $L(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix})$, die keinen Vektor aus $L(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) \cup L(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix})$ enthält.

(2) Bestimmen Sie jeweis eine Basis folgender Vektorräume.
  (a) $L(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix})$.
  (b) $\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + 3\,y + z = 0\}$.
  (c) $L(\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix})$.
  (d) $L(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix})$.

(3) Die Ebene ε hat die Basen

$$A = (\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix})$$

und

$$B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}).$$

Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A.

(4) Seien $v_1 \in \mathbb{R}^2$, $v_2 \in \mathbb{R}^2$ so, dass es für jeden Vektor w in $\mathbb{R}^2$ genau ein Paar $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $w = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2$. Zeigen Sie, dass (v_1, v_2) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

(5) Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ so, dass $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$, $v_2 \cdot v_3 = 0$. (Die drei Vektoren sind also paarweise orthogonal zueinander.) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3) eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. *Hinweis:* Begründen Sie insbesondere, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind.

(6) Sei $a = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot a\\\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot b\end{pmatrix}$ hat; das heißt, zeigen Sie

$$(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot a\\\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot b\end{pmatrix}.$$

Stimmt diese Formel für jede Basis (a, b) des $\mathbb{R}_2$?

(7) Sei $P_5(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 5. Geben Sie jeweils eine Basis für jeden der folgenden Unterräume von $P_5(\mathbb{R})$ an, und bestimmen Sie die Dimension dieser Unterräume.
  (a) $U_1 = \{p \in P_5(\mathbb{R}) \mid p(0) = 0\}$.
  (b) $U_2 = \{p \in P_5(\mathbb{R}) \mid p'(0) = 0\}$ (p' ist dabei die erste Ableitung von p).
  (c) $U_3 = \{p \in P_5(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = p(2) = 0\}$. *Hinweis:* Lineares Gleichungssystem.