Algebra für Informatik,9.Übungsblatt

1. Geben Sie Beispiele für Matrizen (irgendeines Formates), sodass:
   a. $A \neq 0, A^2 = 0$.
   b. $A^2 \neq 0, A^3 = 0$.
   c. $A \neq 0, E_n$ (Einheitsmatrix), $A^2 = A$.
   Ist es möglich, invertierbare Matrizen mit diesen Eigenschaften zu finden ?

2. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix (falls existent):
   a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$, b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_3)_4^4$

3. Zeigen Sie für Matrizen $A, B, C \in K_n^n, n \in \mathbb{N}, K$ ein Körper:
   Aus $A \cdot B = E_n$ und $C \cdot A = E_n$ folgt $B = C$.

4. Überprüfen Sie, ob $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterring des Matrixrings $(\mathbb{R}_3^3, +, \cdot)$ ist. Besitzt R ein Einselement? Ist R ein kommutativer Ring?

5. Sei $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4^6$. Bestimmen Sie $Rg\,(A)$, sowie eine Basis des Zeilenraums und des Spaltenraums von A.

6. a. Sei $A \in \mathbb{R}_m^n$ und $\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subseteq \mathbb{R}_n$ eine Menge von linear abhängigen Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}_n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge $\{A \cdot v_1, A \cdot v_2, ..., A \cdot v_k\} \subseteq \mathbb{R}_m$ linear abhängig ist (mit denselben Koeffizienten).
   b. Zeigen Sie für Matrizen $A \in \mathbb{R}_m^n, B \in \mathbb{R}_n^p$, dass $Rg\,(A \cdot B) \leq Rg\,(B)$ gilt.