Kommutative Algebra
1. Übungsblatt für den 12. März 2013

(1) (Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien I, J Ideale von R. Zeigen Sie, dass auch
$$I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$
ein Ideal von R ist.

(2) (Faktorringe) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R. Seien $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$, sodass $r_1 + I = r_2 + I$ und $s_1 + I = s_2 + I$. Zeigen Sie, dass dann auch $(r_1 s_1) + I = (r_2 s_2) + I$ gilt.

(3) (ACC) Sei $\mathcal{I}(\mathbb{Z})$ die Menge der Ideale des Rings $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{I}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ die (ACC) erfüllt.

(4) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S \rangle$ des Rings $\mathbb{R}[x, y]$ gleich dem ganzen Ring $\mathbb{R}[x, y]$ ist!
   (a) $S = \{xy, 2x^3y + 3\}$.
   (b) $S = \{x^2y, xy^2 + 1\}$.
   (c) $S = \{xy + x, 1 + y^2\}$.

(5) (Homomorphismen und Ideale) Finden Sie jeweils Erzeuger für den Kern der folgenden Homomorphismen:
   (a) $f : \mathbb{Q}[x, y] \to \mathbb{Q}$, $p \mapsto \hat{p}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.
   (b) $h : \mathbb{Q}[x, y, z] \to \mathbb{Q}[x]$, $p \mapsto p(x, 0, 0)$.