Kommutative Algebra
2. Übungsblatt für den 19. März 2013

(1) (Invertierbare Elemente) Bestimmen Sie für den Ring R und das Element $x \in R$ jeweils, ob x invertierbar, prim, oder irreduzibel ist.
   (a) $R = \mathbb{Z}$, $x = -1$.
   (b) $R = \mathbb{Z}$, $x = -19$.
   (c) $R = \mathbb{Z}$, $x = -6$.
   (d) $R = \mathbb{R}[t]$, $x = t^4 + 2t^2 + 1$.
   (e) $R = \mathbb{Z}[t]$, $x = 5t + 10$.
   (f) $R = \mathbb{Q}[t]$, $x = 5t + 10$.

(2) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
   (b) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.

(3) (Prime Elemente)
   (a) Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass ein Element p von R genau dann prim ist, wenn der Faktorring $R/(p)$ ein Integritätsbereich ist.
   (b) Zeigen Sie: Wenn p prim ist, ist auch jedes zu p assoziierte Element prim.

(4) (Irreduzible Elemente) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $r \in R$ mit $r \neq 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
      (i) r ist irreduzibel.
      (ii) Das Ideal (r) ist ein maximales Element in der Menge aller Hauptideale von R, die ungleich R sind.
   (b) Zeigen Sie: Wenn r irreduzibel ist, ist auch jedes zu r assoziierte Element irreduzibel.

(5) (Nicht faktorielle Integritätsbereiche, cf. [1]) Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{5}\,i] := \{a + b\sqrt{5}\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (Dieser Ring ist ein Unterring von $\mathbb{C}$, also ein Integritätsbereich.)
   (a) Verwenden Sie die Abbildung $N(r) := r \cdot \overline{r}$, um alle invertierbaren Elemente von R zu finden.
   (b) Bestimmen Sie alle Elemente r von R mit $N(r) \leq 9$.
   (c) Zeigen Sie, dass die vier Elemente $2, 3, 1 + \sqrt{5}\,i, 1 - \sqrt{5}\,i$ alle irreduzibel sind.
   (d) Zeigen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist.

Literatur

[1] Wikipedia. Unique factorization domain — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 17-March-2009].