Kommutative Algebra
3. Übungsblatt für den 9. April 2013

Wir besprechen am 9.4.13 auch die ausständigen Beispiele vom 2. Blatt.

(1) (Primitive Polynome)
   (a) Sei g ein primitives Polynom in $\mathbb{Z}[x]$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{\beta}{\alpha}\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie $\alpha \mid \beta$.
   (b) Für $h \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ sei $c(h)$ der ggT der Koeffizienten von h. Sei $g \in \mathbb{Q}[x]$, $g \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ so, dass $\alpha\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie: wenn $\alpha \mid c(\alpha\, g)$, so gilt $g \in \mathbb{Z}[x]$.

(2) (Primitive Polynome) Sei $f_1 \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv, und seien $q \in \mathbb{Q}[x]$ und $f_2 \in \mathbb{Z}[x]$ so, dass $f_2 = q \cdot f_1$. Zeigen Sie $q \in \mathbb{Z}[x]$. *Hinweis:* Wenn $\alpha\, q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$, so gilt $\frac{c(\alpha\, q)}{\alpha}\, f_1 \cdot (\frac{1}{c(\alpha\, q)}\, \alpha\, q) = f_2$.

(3) (Artinsche Ringe) Ein Ring R ist *Artinsch*, wenn es keine unendliche absteigende Kette $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \ldots$ von Idealen von R gibt.
   (a) Zeigen Sie, dass ein Artinscher Integritätsbereich ein Körper ist. (Das verallgemeinert, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.) *Hinweis:* Betrachten Sie für $a \neq 0$ die von a^n ($n \in \mathbb{N}$) erzeugten Hauptideale.
   (b) Wir nennen ein Ideal P eines kommutativen Rings mit Eins R *prim*, wenn R/P ein Integritätsbereich ist. Zeigen Sie, dass in jedem Artinschen kommutativen Ring mit Eins jedes prime Ideal maximal ist. *Hinweis:* Betrachten Sie R/P für P prim.

(4) (Maximale Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der zwei Ideale M, J besitzt, sodass M ein maximales Ideal ist, $J \not\subseteq M$, $J \cap M = \{0\}$. Zeigen Sie, dass R/M ein Körper ist, und dass R isomorph zum direkten Produkt $(R/M) \times (R/J)$ ist.