Kommutative Algebra
5. Übungsblatt für den 30. April 2013

(1) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, seien A, B Ideale von R, und sei P ein Primideal von R. Mit $\sqrt{A}$ bezeichnen wir das Radikal von A. Zeigen Sie:
  (a) Wenn $A \cap B \subseteq P$, so gilt $A \subseteq P$ oder $B \subseteq P$.
  (b) $\sqrt{P} = P$.
  (c) $\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$.

(2) (Prime Ideale) Sei $R := \mathbb{Q}[x, y, z]$. Zeigen Sie:
  (a) $\langle x, y \rangle$ ist prim.
  (b) $\langle x^2 y, xy^3 \rangle$ ist nicht prim.

(3) Sei $R := \mathbb{Z}[\![\sqrt[3]{2}]\!]$, und sei $x := 5 + \sqrt[3]{2}$. Da $x \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$, und da $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, ist auch x ganz über $\mathbb{Z}$. Im folgenden Beispiel konstruieren wir ein Polynom in $\mathbb{Z}[t]$ mit führendem Koeffizienten 1, das x als Nullstelle hat.
  (a) Sei $b_0 := 1$, $b_1 := \sqrt[3]{2}$, $b_2 := (\sqrt[3]{2})^2$. Finden Sie eine 3×3-Matrix A, sodass
$$\begin{pmatrix} b_0 x \\ b_1 x \\ b_2 x \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$
  (b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(4) Seien $x := \sqrt{2}$ und $y := \sqrt{\sqrt{2} + 1}$.
  (a) Zeigen Sie, dass x ganz über $\mathbb{Z}$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass y ganz über $\mathbb{Z}[\![x]\!]$ ist.
  (c) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das y als Nullstelle hat.

Hinweis: y liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot x + \mathbb{Z} \cdot y + \mathbb{Z} \cdot xy$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.

(5) Sei $R := \mathbb{Z}[t_1, t_2]/I$, wobei $I := \langle {t_1}^2 - 2,\ {t_2}^2 - t_1 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}[t_1, t_2]}$.
  (a) Zeigen Sie, dass $t_1 + I$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $t_2 + I$ ganz über $\mathbb{Z}[\![t_1 + I]\!]$ ist.
  (c) Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das $t_2 + I$ als Nullstelle hat.

Hinweis: $t_2 + I$ liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_2 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I)(t_2 + I)$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.