Kommutative Algebra
7. Übungsblatt für den 14. Mai 2013

(1) (Ganze Erweiterungen) Seien R, S kommutative Ringe mit Eins, sodass $R \leq S$, S ganz über R, und S ein Körper ist. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist. *Hinweis:* Sei $r \in R \setminus \{0\}$. In S gibt es $\frac{1}{r}$. Also ist $\frac{1}{r}$ ganz über R. Leiten Sie daraus die Invertierbarkeit von r in R her.

(2) (Ausdrücken von geometrischen Bedingungen durch Polynome) Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Gerade, auf der jeder der Punkte $\binom{x_1}{y_1}$, $\binom{x_2}{y_2}$, $\binom{x_3}{y_3}$ liegt, wenn $\det(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}) = 0$.

(3) (Audsdrücken von geometrischen Bedingungen durch Polynome) Zeigen Sie: Es gibt genau dann einen Kreis oder eine Gerade, auf der jeder der Punkte $\binom{x_1}{y_1}$, $\binom{x_2}{y_2}$, $\binom{x_3}{y_3}$, $\binom{x_4}{y_4}$ liegt, wenn

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & {x_1}^2 + {y_1}^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & {x_2}^2 + {y_2}^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & {x_3}^2 + {y_3}^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & {x_4}^2 + {y_4}^2 \end{pmatrix}) = 0.$$

(4) (Beweisen geometrischer Sätze) Wir betrachten den Satz von Desargues. Seien $S, A, B, C, D, E, F, H, I, J$ Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) S, A, D liegen auf einer Geraden.
(b) S, B, E liegen auf einer Geraden.
(c) S, C, F liegen auf einer Geraden.
(d) A, B, H liegen auf einer Geraden.
(e) D, E, H liegen auf einer Geraden.
(f) A, C, J liegen auf einer Geraden.
(g) D, F, J liegen auf einer Geraden.
(h) B, C, I liegen auf einer Geraden.
(i) E, F, I liegen auf einer Geraden.
(j) E, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
(k) F, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
(l) F, B, E liegen nicht auf einer Geraden.
(m) C, A, D liegen nicht auf einer Geraden.

Dann liegen H, I, J auf einer Geraden.

(a) Machen Sie eine Skizze für diesen Satz. (Die Skizze wird schön, wenn Sie S als Ausgangspunkt dreier Strahlen zeichnen, A näher bei S liegt als D, E näher bei S liegt als B, und C näher bei S liegt als F.)
(b) Finden Sie ein polynomiales Gleichungssystem, dessen Unlösbarkeit diesen Satz impliziert.
(c) Zeigen Sie dadurch, dass eine Gröbnerbasis des Systems ein konstantes Polynom enthält, dass das System tatsächlich unlösbar ist. (*Himweis*: Verwenden Sie dazu ein Computeralgebrasystem.)

(5) Wir zeigen im Folgenden den Hilbertschen Nullstellensatz für $\mathbb{C}$, ohne dabei die Noethersche Normalisierung zu verwenden. Sei dazu I ein Ideal von $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ mit $1 \notin I$, und sei M ein maximales Ideal von $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ mit $I \subseteq M$. Zu zeigen bleibt, dass der Körper

$$K := \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]/M$$

algebraisch über $\mathbb{C}$ ist. Gehen Sie dazu so vor:

(a) Nehmen Sie an, $x \in K$ ist transzendent über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Familie $\langle \frac{1}{x-\alpha} \,|\, \alpha \in \mathbb{C} \rangle$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ ist.
(b) Schließen Sie daraus auf die Dimension des Vektorraums K über $\mathbb{C}$.
(c) Beobachten Sie, dass die lineare Hülle von $\{t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} + M \,|\, (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$ gleich K ist. Was sagt das über $\dim_{\mathbb{C}}(K)$?