Kommutative Algebra
8. Übungsblatt für den 28. Mai 2013

(1) (Idealprodukt) Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, sei $m \in R \setminus \{0\}$, und sei I ein Ideal von R. Sei M das von m erzeugte Hauptideal. Wir nehmen an, dass $I \cdot M = M$ gilt. Zeigen Sie $1 \in I$. *Bemerkung und (schwieriges) Bonusbeispiel:* Die Behauptung gilt auch, wenn M kein Hauptideal ist.

(2) (Nullstellensatz) Zeigen Sie, dass es für jedes maximale Ideal M von $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ gibt, sodass $M = \langle x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n \rangle$. *Hinweis:* Betrachten Sie $h : \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]/M \to \mathbb{C}$, $h(p + M) := p(\boldsymbol{\alpha})$.

(3) (Ganze Erweiterungen) Sei k ein Körper, und sei M ein maximales Ideal von $k[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, dass auch der Unterring $k[\![x_1 + M, \ldots, x_{n-1} + M]\!]$ von $k[x_1, \ldots, x_n]/M$ ein Körper ist.

(4) (Bijektive Abbildungen) Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ so, dass

$$\overline{f_1}(\overline{g_1}(t_1, t_2), \overline{g_2}(t_1, t_2)) = t_1$$

und

$$\overline{f_2}(\overline{g_1}(t_1, t_2), \overline{g_2}(t_1, t_2)) = t_2$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Das Polynom $J \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$ ist definiert durch

$$J(t_1, t_2) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(t_1, t_2) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(t_1, t_2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(t_1, t_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass J ein konstantes Polynom sein muss.

(5) (Bijektive Abbildungen) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} -36x^4 - 120x^3 - 24x^2y - 109x^2 - 40xy - 14x - 4y^2 - 3y \\ 3x^2 + 5x + y \end{pmatrix}$$

bijektiv ist. *Hinweis:* Es reicht zu zeigen, dass F injektiv ist. Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem, um $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : F(\boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ zu zeigen.

(6) (Ganze Erweiterungen) Seien A, B Integritätsbereiche mit $A \leq B$. Wir nehmen an, dass es $b_1, \ldots, b_n \in B$ gibt, sodass $A[\![b_1, \ldots, b_n]\!] = B$, und dass B ganz über A ist. Sei P ein primes Ideal von A, und sei $\langle P \rangle_B$ das von P erzeugte Ideal von B. Zeigen Sie $\langle P \rangle_B \cap A = P$. *Hinweis:* Sei $q \in \langle P \rangle_B \cap A$, $q \neq 0$. Rechnen Sie in $Q(B)$ und beobachten Sie, dass $1 \in \langle P \rangle_{B[\![\frac{1}{q}]\!]}$, und dass $B[\![\frac{1}{q}]\!]$ ganz über $A[\![\frac{1}{q}]\!]$ ist. *Bemerkung:* Der Satz gilt auch, wenn A, B Nullteiler haben, hat dann aber einen anderen Beweis.