Kommutative Algebra
10. Übungsblatt für den 11. Juni 2013

(1) Seien $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Wir nehmen an, dass $f_1 = f_2 = \cdots = f_s = 0$ unlösbar ist. Sei G eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Zeigen Sie, dass G ein konstantes Polynom ungleich 0 enthält!

(2) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals: $\langle -1 - x\,y + y^2 + x\,y^2,\ -1 + y^2 \rangle$, lexikographische Ordnung, $x > y$.

(3) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis des folgenden Ideals: $\langle -1 + a\,b + a^2\,c,\ 2 + b\,c^3 \rangle$, lexikographische Ordnung, $a > b > c$.

(4) Seien $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g_1 &= xy - 1 \\ g_2 &= y^2 + 1 \\ g_3 &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Sei

$$s := 5x^2y^2\,g_1 - 3x^3y\,g_2 - 2xy^3\,g_3,$$

und sei $\delta := (3, 3)$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Es gilt

$$\textsc{Deg}(s) < (3, 3).$$

Finden Sie $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$s = b_1\,x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}\,S(g_1, g_3) + b_2\,x^{\beta_1}y^{\beta_2}\,S(g_2, g_3)$$

und jeder Summand in dieser Summe Multigrad $< (3, 3)$ hat.

(5) Sei k ein Körper, sei I ein monomiales Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$, und sei $\leq$ eine zulässige Monomordnung.
   (a) Zeigen Sie, dass jede endliche Menge von Generatoren von I, die nur Monome enthält, eine Gröbnerbasis von I bezüglich $\leq$ ist.
   (b) Ist jede endliche Menge von Generatoren von I eine Gröbnerbasis?

(6) Sei k ein Körper, $\leq$ zulässig, und sei $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$.
   (a) Zeigen Sie: Wenn F eine Gröbnerbasis (bzgl. $\leq$) für $\langle F \rangle$ ist, und $\textsc{Lt}(f_i) \in \langle \textsc{Lt}(f_1), \dots, \textsc{Lt}(f_{i-1}), \textsc{Lt}(f_{i+1}), \dots, \textsc{Lt}(f_s) \rangle$, dann ist auch $F \setminus \{f_i\}$ eine Gröbnerbasis für $\langle F \rangle$.
   (b) Gilt diese Behauptung auch, wenn man das Wort "Gröbnerbasis" beide Male durch "Basis" ersetzt?