

Algebra für Informatik (2014S)

2. Übungsblatt mit Lösungen

für den 17. März 2014

1. Bestimmen Sie eine Gleichung, deren Lösungsmenge die Gerade

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist.

2. Ein Fußgänger startet im Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eine Läuferin startet im Nullpunkt und verfolgt ihn mit 15 km/h. An welchem Punkt wird die Läuferin den Fußgänger einholen?

(Hinweis: Die Einheit im Koordinatensystem beträgt 1km.)

3. Gegeben seien zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Ermitteln Sie eine *Formel* für den Vektor \vec{p} , der sich als Normalprojektion des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a} ergibt.

(Hinweis: \vec{p} hat natürlich die Form $\lambda\vec{a}$. Drücken Sie λ mit Hilfe des Skalarprodukts aus.)

4. Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

5. Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} = 0$ oder ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

(Hinweis: Cauchy-Ungleichung.)

6. Rechnen Sie die Lagrange-Identität nach, d.h. für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle.$$

7. Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{c}.$$

8. Geben Sie die Ebene

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

in impliziter Form an. Geben Sie eine beliebige Gerade an, die in der Ebene e liegt.