Algebra für Informatik (2014S)

3. Übungsblatt

für den 24. März 2014

1. Vom Quadrat $ABCD$ haben wir folgende Angaben:
   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (b) B liegt auf der Geraden
   $$g_B : X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}.$$
   (c) Die Seitenlänge des Quadrats ist 25.
   (d) Die Eckpunkte sind gegen den Uhrzeigersinn mit A, B, C, D beschriftet.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C.

2. Geben Sie die Gerade
   $$e = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$
   als Lösungsmenge von zwei Gleichungen in drei Variablen an.

3. (a) Geben Sie die Ebene $e : x - 2y + 6z = 10$ durch einen Punkt auf der Ebene und zwei Richtungsvektoren an.
   (b) Geben Sie die Gerade $g : x + y + z = 3, x + z = 0$ durch einen Punkt auf der Geraden und einen Richtungsvektor an.

4. Bestimmen Sie die implizite Darstellung jener Geraden, die parallel zur Geraden g mit
   $$g : X = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
   sind und von dieser Abstand 15 haben.

5. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von der Ebene e.
   $$e : X = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 30 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt (*Jacobi-Identität*):
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

7. Gegeben sind folgende Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie:
   (a) $A + 2B$
   (b) $C \cdot D$ und $D \cdot C$
   (c) $A \cdot C$
   (d) $A \cdot D + 3D$

8. Zeigen Sie das für alle $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$ und $B, C \in \mathbb{R}^{l \times m}$ folgendes gilt
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C).$$