Algebra für Informatik (2014S)

6. Übungsblatt

für den 28. April 2014

1. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$?

   (a) $M_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.

   (b) $M_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 1\}$.

2. Betrachten Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme aus Übung 5, Beispiel 2. Welche dieser Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$?

   (a) $n = 2$: $L_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

   (b) $n = 2$: $L_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)\}$.

   (c) $n = 4$: $L_3 = \{\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

   (d) $n = 4$: $L_4 = \{t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

   (e) $n = 4$: $L_5 = \{\begin{pmatrix} 85 \\ -58 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -42 \\ 32 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3. Zeigen Sie, dass ein Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ mit zwei Punkten P_1 und P_2 auch jeden Punkt der Geraden durch P_1 und P_2 enthalten muss.

4. Seien A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $b \neq 0$. Kann

   $$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\}$$

   ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ sein?

5. Gilt $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \in L(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right))$?

6. Gilt $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$?

7. Es seien $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_3, \ldots, v_9 \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $x \in L(v_1, \ldots, v_9)$.

8. Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass nicht jedes $x \in \mathbb{R}^3$ in $L(v_1, v_2)$ liegt.