Algebra für Informatik (2014S)

9. Übungsblatt

für den 19. Mai 2014

1. Bestimmen Sie für jede der Matrizen in Beispiel 1 des vorigen Übungsblattes
   (a) die Dimension ihres Zeilenraums,
   (b) die Dimension ihres Nullraums,
   (c) ihren Rang,
   (d) eine Basis ihres Zeilenraums,
   (e) und eine Basis des $\mathbb{R}^5$, welche die Basis des Zeilenraums erweitert.
2. Bestimmen Sie für jede der Matrizen in Beispiel 1 des vorigen Übungsblattes ihren Spaltenrang und eine Basis ihres Spaltenraums.
3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, und P eine $m \times m$-Matrix. Zeigen oder widerlegen Sie: Ist P invertierbar, dann gilt $Z(PA) = Z(A)$.
4. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie:
   (a) Ist $\dim(U) \leq \dim(V)$, dann gilt $U \subseteq V$.
   (b) Ist $U \subseteq V$, dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$.
5. Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren aus M derart, dass für alle $m \in M$ gilt, dass $(b_1, \dots, b_n, m)$ linear abhängig ist, dann ist B eine Basis von $L(M)$.
6. Seien A ein Matrix, b ein Vektor, und x_0 eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.
   (a) Sei x_1 eine weitere Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Zeigen Sie: $x_1 - x_0 \in N(A)$.
   (b) Schließen Sie aus Teil 6a, dass sich jede Lösung von $Ax = b$ als Summe von x_0 und einer Lösung von $Ax = 0$ darstellen läßt.
7. Stellen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems gemäß Satz 4.60 dar.
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 43 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 42 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 43 \end{pmatrix}$

8. Der Vektor v hat bezüglich der Basis $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix})$ von $L(A)$ die Koordinaten $(v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ -26 \end{pmatrix})$.