Algebra für Informatik (2014S)

10. Übungsblatt

für den 26. Mai 2014

1. Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bzgl. der Basen

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)?$$

2. Es sei $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix})$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ mit $\|b_1\| = \|b_2\| = 1$. Zeigen Sie, dass für jedes $X \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten bzgl. B lauten:

$$(X)_B = \begin{pmatrix} \langle X, b_1 \rangle \\ \langle X, b_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

3. Es sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix})$ und $E = L(B)$.
   (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?
   (b) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat.

4. Es seien S und T die Matrizen aus Übung 8, Bsp. 2.

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid S \cdot x = 0\} \qquad V := N(T).$$

   Berechnen Sie Basen der Räume $U \cap V$ bzw. $U \cup V$.

5. Die Unterräume U und V des $\mathbb{R}^3$ seien wie folgt definiert:

$$U := L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}) \qquad V := \{t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

   Berechnen Sie eine Basis des Raums $U + V$.

6. Berechnen Sie für die Unterräume U und V aus Bsp. 4 eine Basis von $U + V$.

7. Berechnen Sie die Schnittgerade der xy-Ebene mit der Ebene

$$\{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

8. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, das die lineare Mannigfaltigkeit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

   als Lösung hat.