Algebra für Informatik (2014S)

11. Übungsblatt

für den 2. Juni 2014

1. Bestimmen Sie alle Vektoren
   (a) im $\mathbb{R}^3$, die auf $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ normal stehen.
   (b) im $\mathbb{R}^4$, die auf $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$ normal stehen.
2. Gegeben seien die Vektoren $x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ und $x_4 = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie:
   (a) $\{x_1\}^\perp$,
   (b) $\{x_1, x_2\}^\perp$,
   (c) $\{x_1, x_2, x_3\}^\perp$,
   (d) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^\perp$,

   und bestimmen Sie jeweils die Dimension davon.
3. Welche der folgenden Basen sind Orthonormalbasen?
   (a) $(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix})$.
   (b) $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$.
   (c) $(\begin{pmatrix}0.6\\0.8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.8\\0.6\end{pmatrix})$.
4. Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt:
$$A = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}).$$
5. Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene $e : 2x - y + 3z = 0$ an.
6. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für folgenden Unterraum:
   $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \text{ und } x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}$.
7. Bestimmen Sie mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis von
$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$
8. Sei B eine Orthonormalbasis von $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$\langle v, w\rangle = \langle (v)_B, (w)_B\rangle.$$