

Algebra für Informatik (2014S)

13. Übungsblatt

für den 23. Juni 2014

1. Zeigen Sie im Detail, dass die Kongruenz modulo n ($n \in \mathbb{N}$) transitiv ist, d.h., dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \equiv_n b \wedge b \equiv_n c \implies a \equiv_n c.$$

2. Finden Sie eine ganzzahlige Lösung für x und y in der Gleichung $ax + by = c$ mit

- (a) $a = 23, b = 17, c = 1.$
- (b) $a = 23, b = 17, c = 3.$
- (c) $a = 22, b = 16, c = 1.$
- (d) $a = 22, b = 16, c = 2.$
- (e) $a = 22, b = 16, c = 4.$

3. Finden Sie eine Lösung für die folgenden Kongruenzen:

- (a) $17x \equiv_{23} 1$
- (b) $23x \equiv_{17} 1$
- (c) $17x \equiv_{23} 3$
- (d) $16x \equiv_{22} 1$
- (e) $16x \equiv_{22} 6$

4. (a) Bestimmen Sie alle Zahlen zwischen 0 und 24, die modulo 24 invertierbar sind. Wieviele sind es?

- (b) Zeigen Sie: Ist a modulo n invertierbar, und sind $a \equiv b \pmod{n}$, dann ist auch b modulo n invertierbar.

5. Zeigen Sie, dass für alle x, y, z in einem kommutativen Ring gilt:

- (a) $(x + y)z = xz + yz;$
- (b) $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2.$ (Auch in allgemeinen Ringen schreibt man a^2 für $a \cdot a$ und $2 := 1 + 1.$)

6. Zeigen Sie, dass in einem Körper

- (a) stets $0 \neq 1$ gilt;
- (b) es für jedes x höchstens ein y mit $xy = 1$ geben kann.

7. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Elemente in einem Körper nur dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist.

8. Sei

- (a) $n = 2;$
- (b) $n = 3;$

(c) $n = 4$;

(d) $n = 6$;

(e) $n = 7$.

Gibt es Zahlen a, b , sodass zwar $ab \equiv_n 0$, aber weder $a \equiv_n 0$ noch $b \equiv_n 0$?