Übung 1

1. Welche der folgenden Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ sind assoziativ bzw. kommutativ? Existiert ein neutrales Element ?

   a. $(\mathbb{Z}, \circ)$, wobei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen ist und $x \circ y := x$, für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

   b. $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ\right)$, wobei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \,|\, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Funktion}\}$ und für alle $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \circ g$ die Hintereinanderausführung von f und g ist, d.h $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und S die Menge aller Äquivalenzklassen von Schaltungen mit n Schaltern, s die Serienschaltung und p die Parallelschaltung. Zeigen Sie, dass (S, s, p) ein beschränkter Verband ist. Bestimmen Sie Null-und Einselement und die Verbandsordnung dieses Verbandes.

3. Welche der folgenden geordneten Mengen sind verbandsgeordnet? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Verbandsoperationen $\sqcap$ und $\sqcup$.

   a. $(\mathbb{N}, |)$, wobei für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m|n :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = k.m$

   b. $(\{S | S \subseteq \mathbb{N}, S \text{ ist unendlich}\}, \subseteq)$

   c. Eine linear geordnete Menge

4. a. Zeigen Sie, dass in einem Verband Null-und Einselement, falls solche Elemente existieren, eindeutig bestimmt sind. Welche Eigenschaften haben 0 und 1 in der Verbandsordnung?

   b. Zeigen Sie, dass jeder endliche Verband V beschränkt ist. (Hinweis: Sei $V = \{v_1, .., v_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.Betrachten Sie die Elemente $v_1 \sqcap ... \sqcap v_n$ und $v_1 \sqcup ... \sqcup v_n$) Geben Sie ein Beispiel für einen nichtbeschränkten Verband.