

Übung 8

1. Bestimmen Sie alle Normalteiler der D_4 .
2. Sei p eine Primzahl.
 - (a) Zeigen Sie: Jede Gruppe von Ordnung p ist zyklisch.
 - (b) Geben Sie eine nicht-zyklische Gruppe der Ordnung p^2 an.
 - (c) Finden Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung p^3 .
3. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R} .
Bestimmen Sie das Zentrum $Z(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$.
4. Geben Sie Kern und Bild folgender Gruppenhomomorphismen an. Welche sind Mono-, Epi-, Isomorphismen?
 - (a) $\det: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, A \mapsto \det A$
 - (b) $h: \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_8, x \mapsto 2x$
 - (c) Bonus: Für eine Gruppe G ist $\text{Aut}(G)$ die Gruppe der bijektiven Homomorphismen von G nach G .
 $i: G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto \phi_g$, wobei $\phi_g: G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$
5. Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen mit 72 Elementen.