Übung 9

1. Sei $(R, +, .)$ ein (nicht notwendig kommutativer) Integritätsbereich. Zeigen Sie:
   $\forall x \neq 0, y, z \in R : (x \cdot y = x \cdot z \Longrightarrow y = z) \wedge (y \cdot x = z \cdot x \Longrightarrow y = z)$
2. Sei R ein Ring. Zeigen Sie:
   R ist ein Integritätsbereich $\Longleftrightarrow R[x]$ ist ein Integritätsbereich
3. Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass $\{0\}$ und K die einzigen Ideale von K sind.
4. Ist der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?
5. Sei R ein Ring und $S \subseteq R$. $C(S) := \{x \in R \,|\, \forall s \in S : x.s = s.x\}$ heißt Zentralisator von S in R. Zeigen Sie:
   a. Für jede Teilmenge S von R ist $C(S)$ ein Unterring von R.
   b. Berechnen Sie $C(S)$ für den Matrixring $\mathbb{R}_2^2$ und $S := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} |x, y \in \mathbb{R} \right\}$